第 5 章　1 説明変数の回帰分析: 仮説検定と信頼区間

James H. Stock 著・Mark W. Watson 著・宮尾 龍蔵 訳

『入門計量経済学』（共立出版、2016）
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/book/b10003746.html

2025-09-22

1. 1つの回帰係数に関する仮説検定

仮説検定のプロセス

回帰係数に関する仮説検定は、母集団の平均に関する仮説検定と基本的に同じである。

1. ステップ１：帰無仮説と対立仮説の設定
2. ステップ２：t 統計量の計算
3. ステップ３：p 値の計算と判定

ステップ1：帰無仮説と対立仮説の設定

母集団の真の傾き β_1 がある特定の値 $\beta_{1,0}$ を取るという**帰無仮説 (null hypothesis)** と、β_1 は $\beta_{1,0}$ と等しくないという**両側の対立仮説 (two-sided alternative hypothesis)** を設定する。

$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0}$ vs. $H_1 : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$

例えば、「クラス規模を減らしても成績は上がらない」という主張は、回帰係数 β_1 がゼロであるという仮説、$H_0 : \beta_1 = 0$ に相当する。

ステップ 2：t 統計量 (t-statistic) の計算

- まず、β_1 の**標準誤差 (standard error of β_1)**、$SE(\hat{\beta}_1)$ を求める。

これは $\hat{\beta}_1$ の標本分布の標準偏差の推定量である。

$$SE(\hat{\beta}_1) = \sqrt{\hat{\sigma}^2_{\hat{\beta}_1}}$$

- 次に、t 統計量を計算する。

$$t = \frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{SE(\hat{\beta}_1)}$$

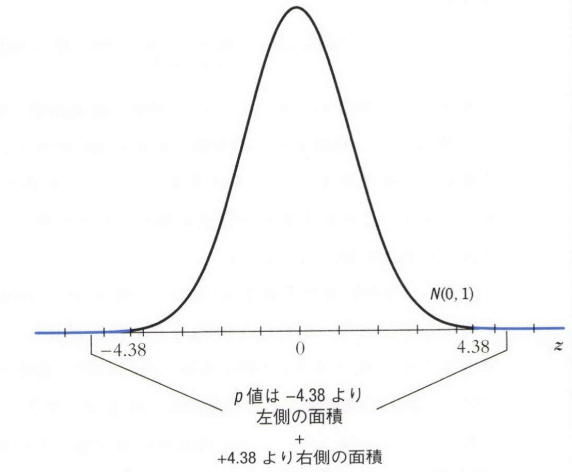
ステップ3：p 値 (p-value) の計算と判定

- 帰無仮説が正しいという仮定の下で、実際に観測された推定値 $\hat{\beta}_1$ よりも、$\beta_{1,0}$ からさらに離れた値を得る確率、すなわち p 値を計算する。
- 大標本の場合、帰無仮説の下で t 統計量は標準正規分布に従うため、p 値は次式で計算できる。

$$p値 = P_{H_0}(|\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}| > |\hat{\beta}_1^{act} - \beta_{1,0}|) = P(|Z| > |t^{act}|) = 2\Phi(-|t^{act}|)$$

- 計算された p 値が事前に設定した有意水準（例：5%）より小さい場合、帰無仮説は棄却される。
- あるいは、t 統計量の絶対値 $|t^{act}|$ が臨界値（例：5%水準の両側検定では 1.96）より大きい場合に帰無仮説を棄却する方法もある。

図 5-1



$t = -4.38$ のとき，p 値はわずか 0.00001 となる。

2. 1つの回帰係数に関する信頼区間

信頼区間の定義と作成

β_1 の **95%信頼区間 (confidence interval for** β_1**)** とは、以下の 2 つの意味を持つ区間である。

1. 5%有意水準の両側テストで棄却されない β_1 の値の集合。
2. β_1 の真の値を含む確率が 95%である区間。つまり、起こりうる全ての標本のうち 95%で、この区間が真の β_1 を含む。

大標本の場合の信頼区間

大標本の場合、β_1 に関する 95%信頼区間は以下の式で求められる。

$$[\hat{\beta}_1 - 1.96 \times SE(\hat{\beta}_1), \quad \hat{\beta}_1 + 1.96 \times SE(\hat{\beta}_1)]$$

この区間は、95%の**信頼水準 (confidence level)** を持つと呼ばれる。

X の変化の影響に関する信頼区間

説明変数 X が Δx だけ変化したとき、Y に与える影響は $\beta_1 \Delta x$ である。

この影響に関する 95%信頼区間は、β_1 の信頼区間を用いて以下のように作成できる。

$$[(\hat{\beta}_1 - 1.96 \times SE(\hat{\beta}_1))\Delta x, \quad (\hat{\beta}_1 + 1.96 \times SE(\hat{\beta}_1))\Delta x]$$

3. x が (0, 1) 変数のときの回帰分析

(0, 1) 変数（ダミー変数）

回帰分析は、説明変数が「女性なら 1、男性なら 0」のように 2 つの値しか取らない **(0, 1) 変数 (binary variable)** にも応用できる。このような変数は**ダミー変数 (dummy variable)** あるいは**インディケーター変数 (indicator variable)** とも呼ばれる。

係数の解釈

(0, 1) 変数を D_i として回帰モデルを考えると以下のようになる。

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + u_i$$

このとき、各係数は以下のように解釈される。

- β_0: $D_i = 0$ のグループの母集団における Y の平均値。
  $E(Y_i|D_i = 0) = \beta_0$。
- $\beta_0 + \beta_1$: $D_i = 1$ のグループの母集団における Y の平均値。
  $E(Y_i|D_i = 1) = \beta_0 + \beta_1$。
- β_1: 2 つのグループの母集団平均の差。
  $\beta_1 = E(Y_i|D_i = 1) - E(Y_i|D_i = 0)$。$\beta_1$ は D_i **の係数 (coefficient on D_i)** と呼ばれる。

仮説検定と信頼区間

2 つの母集団平均が等しいという帰無仮説は、$\beta_1 = 0$ という仮説を検定することと同じである。

- t 統計量 $t = \hat{\beta}_1 / SE(\hat{\beta}_1)$ を計算し、その絶対値が 1.96 を上回れば、5%水準で帰無仮説は棄却される。
- β_1 に関する 95%信頼区間は、$\hat{\beta}_1 \pm 1.96 \times SE(\hat{\beta}_1)$ で求められ、これは 2 つの母集団の平均の差に関する 95%信頼区間に相当する。

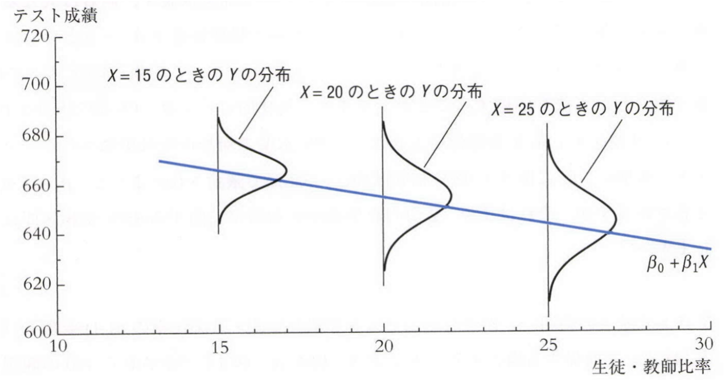
4. 不均一分散と均一分散

定義

- **均一分散 (homoscedasticity)**: 誤差項 u_i の条件付分散が、説明変数 X_i の値に依存せず一定である状態。$Var(u_i|X_i = x)$ が x に依存しない。
- **不均一分散 (heteroscedasticity)**: 誤差項 u_i の条件付分散が、X_i の値に依存する状態。

経済データでは、不均一分散が多くの実証研究で登場する。例えば、教育年数が高い人ほど賃金のばらつきが大きくなる傾向があり、これは不均一分散の一例である。説得的な理由がない限り、誤差項は不均一分散と想定するのが無難である。

図 5-2


テスト成績
720
700
680
660
640
620
600
X = 15 のときの Y の分布
X = 20 のときの Y の分布
X = 25 のときの Y の分布
$\beta_0 + \beta_1 X$
10
15
20
25
30
生徒・教師比率

OLS 推定量への影響

- **不偏性と一致性**: OLS 推定量は、誤差項が均一分散でも不均一分散でも、不偏性と一致性を持ち、大標本では正規分布に従う。
- **標準誤差**:
  - **不均一分散を考慮した標準誤差 (heteroscedasticity-robust standard error)**: 誤差項が不均一分散かどうかにかかわらず、有効な統計的推論を可能にする。Eicker-Huber-White の標準誤差とも呼ばれる。
  - **均一分散のみに有効な標準誤差 (homoscedasticity-only standard error)**: 誤差項が均一分散であるという特別な場合にのみ成立する単純な公式。**もし誤差項が不均一分散の場合、この標準誤差を用いると、仮説検定や信頼区間は正しくなくなる。**

実践的には、常に不均一分散を考慮した標準誤差を使用することが推奨される。

5. 最小二乗法の理論的基礎

ガウス・マルコフの定理

ガウス・マルコフの定理 (Gauss-Markov theorem) とは、以下の条件下で、OLS 推定量が**最良線形不偏推定量 (Best Linear Unbiased Estimator, BLUE)** であることを示す定理である。

- 最小二乗法の 3 つの仮定（基本概念 4.3）が成立する。
- 誤差項が均一分散である。

「最良 (Best)」とは、線形で条件付不偏なすべての推定量の中で、分散が最小（最も効率的）であることを意味する。

ガウス・マルコフの定理の限界

この定理には 2 つの重要な限界がある。

1. **条件が満たされない可能性**

経済学の応用では誤差項が不均一分散であることが多く、その場合 OLS は BLUE ではない。

2. **比較対象の限定**

比較対象が「線形」推定量に限られている。非線形の推定量の中には、OLS より効率的なものが存在する可能性がある。

6. 標本数が小さい場合の t 統計量

均一分散・正規分布回帰の仮定

標本数が小さい場合、t 統計量の正確な分布は未知の母集団分布に依存するため複雑になる。
しかし、以下の 5 つの仮定が満たされる場合、OLS 推定量は正規分布に、均一分散の t 統計量はスチューデントの t 分布に従う。

1. 最小二乗法の 3 つの仮定
2. 誤差項が均一分散である
3. 誤差項が正規分布に従う

これら 5 つの仮定を**均一分散・正規分布回帰の仮定 (homoscedastic normal regression assumptions)** と呼ぶ。

ステューデント t 分布の利用

- 上記の仮定が満たされる場合、仮説検定の臨界値は標準正規分布ではなく、自由度 $n-2$ のステューデント t 分布から取るべきである。
- ただし、標本数がある程度大きい場合、t 分布と正規分布の違いは無視できるほど小さい。
- 計量経済学の応用では、誤差項が均一分散で正規分布であると信じられる理由はほとんどないが、標本数は大きいことが一般的なため、通常は不均一分散を考慮した標準誤差と標準正規分布を用いて統計的推論を行う。

7. 結論

カリフォルニア州のデータを用いた分析では、生徒・教師比率とテスト成績の間に統計的に有意な負の関係が見出された。

β_1 に対する 95%信頼区間は [-3.30, -1.26] であり、ゼロを含んでいない。

残された課題

しかし、この結果が因果関係を意味するかは慎重に考える必要がある。

- 裕福な学区は、クラス規模が小さいだけでなく、施設が充実している、教師の給与が高いなど、他の面でも有利である可能性がある。
- これらの「クラス規模と関連し、かつテスト成績の真の要因である」他の要因の影響を取り除かなければ、生徒・教師比率だけの純粋な効果を測定することはできない。

この問題に取り組むためには、複数の説明変数を同時に考慮する**多変数回帰分析**が必要であり、これは次章以降のテーマとなる。