

第 7 章 多変数回帰における仮説検定と信頼区間

James H. Stock 著・Mark W. Watson 著・宮尾 龍蔵 訳
『入門計量経済学』（共立出版、2016）

<https://www.kyoritsu-pub.co.jp/book/b10003746.html>

2025-11-10

1. 1 つの係数に関する仮説検定と信頼区間

1つの係数に関する仮説検定

- ▶ 多変数回帰モデルの1つの係数に関する仮説検定の手続きは、1変数回帰の場合と基本的に同じである。
- ▶ 標本数が大きい場合、OLS推定量 $\hat{\beta}_j$ は正規分布に従い、その標準誤差 $SE(\hat{\beta}_j)$ は一貫性を持つ。

仮説検定の手続き

1. 帰無仮説の設定: $H_0 : \beta_j = \beta_{j,0}$ vs $H_1 : \beta_j \neq \beta_{j,0}$
2. t統計量の計算: $t = \frac{\hat{\beta}_j - \beta_{j,0}}{SE(\hat{\beta}_j)}$
3. p値の計算と判定: $p\text{-value} = 2\Phi(-|t^{act}|)$ 。p値が有意水準を下回れば、帰無仮説を棄却する。

1つの係数に関する信頼区間

- ▶ 係数 β_j に関する 95%信頼区間は、以下の式で求められる。

$$[\hat{\beta}_j - 1.96 \times SE(\hat{\beta}_j), \hat{\beta}_j + 1.96 \times SE(\hat{\beta}_j)]$$

- ▶ これは、5%有意水準の両側検定で棄却されない β_j の値の集合でもある。

応用例：テスト成績と生徒・教師比率 (STR)

- ▶ 回帰モデル (英語学習者の割合 $PctEL$ をコントロール) :

$$\widehat{TestScore} = 686.0 - 1.10 \times STR - 0.650 \times PctEL$$

(SE) (8.7) (0.43) (0.031)

- ▶ **STRの係数の検定:** $t = (-1.10 - 0)/0.43 = -2.54$
- ▶ **結果:** $|t| > 1.96$ なので、5%水準で「生徒・教師比率はテスト成績に影響しない」という帰無仮説は棄却される。
- ▶ **95%信頼区間:** $-1.10 \pm 1.96 \times 0.43 = [-1.95, -0.26]$

2. 結合仮説の検定

なぜ個々の係数を1つずつ検定できないのか？

- ▶ 複数の制約（例: $H_0 : \beta_1 = 0$ かつ $\beta_2 = 0$ ）を個別に5%水準で検定すると、全体としての棄却率（サイズ）が5%を超えてしまう。
- ▶ 例: t_1 と t_2 が独立な場合、両方が棄却されない確率は $0.95^2 = 0.9025$ 。
- ▶ したがって、帰無仮説が正しいときに誤って棄却する確率は $1 - 0.9025 = 9.75\%$ となり、5%より大きくなる。
- ▶ この問題を解決するために、**F 統計量**を用いる。

結合帰無仮説 (Joint Null Hypothesis)

- ▶ 結合帰無仮説とは、回帰式の係数に 2 つ以上の制約を課す仮説である。
 - ▶ $H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0}, \beta_2 = \beta_{2,0}, \dots, \beta_q = \beta_{q,0}$ (q 個の制約)
 - ▶ $H_1 : H_0$ の制約のうち、少なくとも 1 つが成り立たない。

F 統計量

- ▶ q 個の制約を同時にテストするために用いられる。
- ▶ 性質:
 - ▶ 大標本の下で、帰無仮説が正しいとき、F 統計量は $F_{q,\infty}$ 分布に従う。
 - ▶ $q = 1$ のとき、F 統計量は t 統計量の二乗 ($F = t^2$) に等しい。
- ▶ 判定: 計算された F 統計量が $F_{q,\infty}$ 分布の臨界値より大きい場合、帰無仮説を棄却する。
- ▶ 不均一分散: 実践的には、不均一分散を考慮した (ロバストな) F 統計量を使用する必要がある。

回帰式全体の F 統計量

- ▶ 定数項を除くすべての説明変数の係数がゼロであるという仮説を検定する。
 - ▶ $H_0 : \beta_1 = 0, \beta_2 = 0, \dots, \beta_k = 0$
- ▶ この統計量は、モデルに含まれる説明変数が被説明変数の変化を全く説明しないという帰無仮説をテストするものである。

3. 複数の係数に関する信頼集合

信頼集合 (Confidence Sets)

- ▶ 1つの係数に対する「信頼区間」を、複数の係数に拡張したものが**信頼集合**である。
- ▶ 2つの係数 (β_1, β_2) の場合、95%信頼集合は (β_1, β_2) 平面上の**楕円形**の領域となる。
- ▶ この領域は、F検定において5%水準で棄却されないすべての対 $(\beta_{1,0}, \beta_{2,0})$ の集合である。

4. モデルの特定化と変数選択

モデル特定化の指針

- ▶ どの変数を回帰式に含めるべきか？
- ▶ **関心のある変数 (variable of interest)**: その効果を推定したい主要な変数。
- ▶ **コントロール変数 (control variables)**: 関心のある変数の係数に「除外された変数のバイアス」が生じないようにするために含める変数。
 - ▶ コントロール変数自体の係数は、必ずしも因果関係として解釈される必要はない。

変数選択の際の注意点

- ▶ R^2 や 修正済み R^2 を大きくすることだけを目的として変数を選んではいけない。
- ▶ 変数を追加しすぎると、推定量の分散が大きくなる（不完全な多重共線性）。
- ▶ 重要な変数を入れ忘れると、バイアスが生じる。
- ▶ **外部情報（経済理論や先行研究）** に基づいてモデルを特定化することが重要である。

5. カリフォルニア州データへの応用

分析結果の改善

- ▶ テスト成績を STR , 英語学習者の割合 ($PctEL$), 生徒 1 人当たり支出 ($Expn$), 経済的に恵まれない生徒の割合 ($Lunch$) などで回帰。
- ▶ **発見:**
 - ▶ 支出を一定としても、クラス規模を小さくすることはテスト成績に正の影響を与える (ただし影響は小さい)。
 - ▶ 経済状況をコントロールすることが、バイアスを除くために極めて重要である。

結論

- ▶ 多変数回帰を用いることで、複数の要因を同時にコントロールし、関心のある変数の効果をより正確に推計できる。
- ▶ F 統計量は、複数の係数に関する複雑な仮説を検証するための強力なツールである。
- ▶ 適切な変数選択と、統計的推論（検定と信頼区間）を組み合わせることで、説得力のある実証分析が可能となる。