

## 第 8 章 非線形関数の回帰分析

James H. Stock 著・Mark W. Watson 著・宮尾 龍蔵 訳  
『入門計量経済学』（共立出版、2016）

<https://www.kyoritsu-pub.co.jp/book/b10003746.html>

2025-12-05

# 1. 非線形回帰の一般アプローチ

## 非線形回帰とは

- ▶  $X$  が変化したときの  $Y$  への影響（傾き）が、 $X$  自体の値や他の変数に依存する場合、回帰式は**非線形 (nonlinear)** となる。
- ▶ **2つの主要なグループ:**
  1.  $X_1$  の効果が  $X_1$  自体の値に依存する場合（例：多項式モデル、対数モデル）。
  2.  $X_1$  の効果が別の変数  $X_2$  の値に依存する場合（例：交差項を含むモデル）。

## 一般アプローチ

- ▶ 変数の非線形関数 ( $X^2, \ln(X), X_1 \times X_2$  など) を新しい独立変数として定義する。
- ▶ パラメーター (係数  $\beta$ ) については線形であるため、通常の変数回帰 (OLS) の手法をそのまま適用できる。
- ▶ **手続き:**
  1. 非線形関数の特定化。
  2. OLS による係数の推定。
  3. t 統計量や F 統計量を用いた仮説検定。
  4. 非線形効果の解釈 (グラフ化が有効)。

## 2. 多項式回帰モデル

## 多項式回帰 (Polynomial Regression)

- ▶  $X$  の累乗 (2 乗、3 乗など) を説明変数に加えるモデル。
- ▶ **2 次関数モデル (Quadratic Model):**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 X_i^2 + u_i$$

- ▶ **係数の解釈:**
  - ▶  $\beta_1, \beta_2$  の一方だけで効果を語ることはできない。
  - ▶  $X$  が  $x$  から  $x + \Delta x$  まで変化したときの  $Y$  の変化を計算する必要がある。
  - ▶ 傾き  $\frac{dY}{dX} = \beta_1 + 2\beta_2 X$  は  $X$  に依存する。

## 非線形性の検定

- ▶ 線形モデル ( $H_0 : \beta_2 = 0$ ) か、非線形モデルか。
- ▶ **検定方法:**  $X^2$  や  $X^3$  などの高次項の係数に関する t 検定や F 検定を行う。
- ▶ カリフォルニア州のデータ (テスト成績と所得) では、所得の 2 乗の係数が統計的に有意であり、非線形関係が確認された。

### 3. 対数を用いた回帰モデル

## 対数モデルの3つのケース

対数 (ln) を用いることで、「変化率 (%)」の関係をモデル化できる。

1. **Linear-Log モデル:**  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln(X_i) + u_i$ 
  - ▶  $X$  の 1% の変化が、 $Y$  を  $0.01\beta_1$  変化させる。
2. **Log-Linear モデル:**  $\ln(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i + u_i$ 
  - ▶  $X$  の 1 単位の変化が、 $Y$  を  $100\beta_1\%$  変化させる。
3. **Log-Log モデル:**  $\ln(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 \ln(X_i) + u_i$ 
  - ▶  $X$  の 1% の変化が、 $Y$  を  $\beta_1\%$  変化させる ( $\beta_1$  は弾力性)。

## どのモデルを選ぶべきか？

- ▶ 散布図を見て、データの形状に合うものを選ぶ。
- ▶ 経済理論的な解釈（弾力性が一定か、変化率が一定か）に基づいて選ぶ。
- ▶  $R^2$  の比較は、 $Y$  の単位が異なる場合（ $Y$  と  $\ln(Y)$ ）には直接行えないことに注意。

## 4. 交差項 (Interaction Terms)

## 交差項の定義

- ▶ 2つの説明変数の積 ( $X_1 \times X_2$ ) を回帰式に含める。
- ▶ これにより、一方の変数の効果が他方の変数の値によって変化することを表現できる。

## ケース 1 : 2つのダミー変数の交差

- ▶  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_{1i} + \beta_2 D_{2i} + \beta_3 (D_{1i} \times D_{2i}) + u_i$
- ▶  $\beta_3$  は、 $D_2 = 1$  のときの  $D_1$  の効果と、 $D_2 = 0$  のときの  $D_1$  の効果の差を表す。
- ▶ 例：性別と大学卒業資格が賃金に与える影響。

## ケース 2：ダミー変数と連続変数の交差

- ▶  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 D_i + \beta_2 X_i + \beta_3 (D_i \times X_i) + u_i$
- ▶ 2つのグループ間で、回帰線の切片 ( $\beta_1$ ) と傾き ( $\beta_3$ ) の両方が異なることを許容する。
- ▶  $D = 0$  のとき： $Y = \beta_0 + \beta_2 X$
- ▶  $D = 1$  のとき： $Y = (\beta_0 + \beta_1) + (\beta_2 + \beta_3) X$

## ケース 3 : 2つの連続変数の交差

- ▶  $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 (X_{1i} \times X_{2i}) + u_i$
- ▶  $X_1$  が 1 単位変化したときの  $Y$  への影響 :  $\frac{\Delta Y}{\Delta X_1} = \beta_1 + \beta_3 X_2$
- ▶ この影響は  $X_2$  の値に依存する。

## 5. 結論

## 非線形モデルの重要性

- ▶ 現実の経済現象は直線で近似できないことが多い。
- ▶ 多項式、対数、交差項を適切に組み合わせることで、より現実的で説得力のあるモデルを構築できる。
- ▶ 推定値の解釈には、具体的な数値を用いたシミュレーションやグラフの作成が不可欠である。