

第 17 章 線形回帰分析の理論：1 説明変数モデル

James H. Stock 著・Mark W. Watson 著・宮尾 龍蔵 訳
『入門計量経済学』（共立出版、2016）

<https://www.kyoritsu-pub.co.jp/book/b10003746.html>

2026-05-15

1. はじめに：なぜ理論が必要か

計量経済理論を学ぶ目的

- ▶ 回帰分析を「ブラックボックス」ではなく、中身が理解された「ツールキット」として使いこなすため。
- ▶ どのような仮定の下で、なぜ分析ツールが有効に働くのかを数学的に理解する。
- ▶ ある手法が有効でない状況（仮定の違反）を認識し、適切な代替案を検討できるようになる。
- ▶ **本章の範囲**：第 4 章と第 5 章の内容を数学的に補足し、大標本および小標本における統計的性質を深掘りする。

2. 拡張された最小二乗法の仮定

5つの最小二乗法の仮定

第 4 章の 3 つの仮定を強化し、合計 5 つの仮定を置く。

1. $E(u_i|X_i) = 0$: 誤差項の条件付き期待値はゼロ。
2. **i.i.d.**: (X_i, Y_i) は独立かつ同一の分布から抽出。
3. **有限の 4 次モーメント**: 大きな異常値はほとんど起こらない。
4. **均一分散 (Homoscedasticity)**: $var(u_i|X_i) = \sigma_u^2$ (一定)。
5. **正規分布 (Normality)**: X が与えられた下での u の条件付き分布は正規分布。

仮定の役割

- ▶ **仮定 1-3:** OLS 推定量の一致性と漸近的正規性を保証する（大標本理論の基礎）。
- ▶ **仮定 4 (均一分散):** OLS 推定量が線形不偏推定量の中で最も効率的（分散最小）であることを保証する（ガウス・マルコフの定理）。
- ▶ **仮定 5 (正規性):** 小標本においても t 統計量が正確に学生 t 分布に従うことを保証する。

3. 漸近分布理論の基礎

大標本における推定量

標本数 n が無限大に近づくときの推定量の振る舞いを記述する。

- ▶ **確率収束 (Convergence in Probability)**: 標本数が増えるにつれ、推定量が真の値に近づく性質（一致性）。
 - ▶ **大数の法則 (LLN)**: 標本平均 \bar{Y} は母平均 μ_Y に確率収束する。
- ▶ **分布収束 (Convergence in Distribution)**: 標準化された統計量の分布が、特定の分布（通常は正規分布）に近づく性質。
 - ▶ **中心極限定理 (CLT)**: 標準化された標本平均は標準正規分布 $N(0, 1)$ に分布収束する。

便利な数学的ツール

- ▶ **連続マッピング定理 (Continuous Mapping Theorem):**
 $\hat{\theta} \xrightarrow{p} \theta$ ならば、 $g(\hat{\theta}) \xrightarrow{p} g(\theta)$ 。
- ▶ **スルスキーの定理 (Slutsky's Theorem):** 一致推定量と分布収束する統計量を組み合わせたときの収束先を決定する。
 - ▶ 例：標準誤差（一致推定量）で割った t 統計量の分布。

4. OLS 推定量の統計的性質

不偏性と一致性

- ▶ **不偏性:** $E(\hat{\beta}_1|X) = \beta_1$ 。仮定 1 が満たされれば、OLS 推定量は不偏である。
- ▶ **一致性:** $n \rightarrow \infty$ のとき $\hat{\beta}_1 \xrightarrow{p} \beta_1$ 。仮定 1-3 が満たされれば、OLS 推定量は一致性を持つ。

漸近的正規性 (Asymptotic Normality)

- ▶ 仮定 1-3 の下で、大標本における $\hat{\beta}_1$ の分布は正規分布で近似できる。

$$\sqrt{n}(\hat{\beta}_1 - \beta_1) \xrightarrow{d} N(0, \sigma_{\hat{\beta}_1}^2)$$

- ▶ これにより、母集団の分布が未知であっても、大標本であれば正規分布を用いて検定や信頼区間の構成が可能になる。

5. ガウス・マルコフの定理と効率性

最良線形不偏推定量 (BLUE)

- ▶ **ガウス・マルコフの定理:** 仮定 1-4 (均一分散まで) が満たされるとき、OLS 推定量 $\hat{\beta}_1$ は**最良線形不偏推定量 (BLUE)** である。
- ▶ 「最良 (Best)」とは、すべての線形不偏推定量の中で分散が最小であることを意味する。
- ▶ **注意:** 誤差項が不均一分散である場合、OLS はもはや BLUE ではない。

ウェイト付き最小二乗法 (WLS)

- ▶ 誤差項が不均一分散であり、かつその分散の形状 $var(u_i|X_i)$ が既知である場合、**ウェイト付き最小二乗法 (WLS)** を用いることで、OLS よりも効率的な推定が可能になる。
- ▶ 実際には分散の形状が未知であることが多く、その場合は「不均一分散を考慮した標準誤差」を用いるのが標準的なアプローチである。

6. 小標本における正確な分布

均一分散・正規分布回帰の仮定

- ▶ 仮定 1-5 がすべて満たされる場合、小標本であっても以下の性質が厳密に成り立つ。
- ▶ **OLS 推定量の正規性**: $\hat{\beta}_1$ 自体が（近似ではなく）正確に正規分布に従う。
- ▶ **t 分布の成立**: 均一分散を仮定した標準誤差で計算された t 統計量は、正確に自由度 $n - 2$ のスチューデントの t 分布に従う。
- ▶ **F 分布の成立**: 結合仮説検定のための F 統計量は、正確に **F 分布**に従う。

7. 結論

理論のまとめ

- ▶ 計量経済学の推論の多くは、大標本理論（一致性と漸近的正規性）に基づいている。
- ▶ 均一分散や正規性の仮定は、推定量に「効率性」や「正確な小標本分布」という追加的な性質を与えるが、現実のデータでは満たされないことも多い。
- ▶ 理論を理解することで、データの性質（サンプルの大きさや分散の形状）に応じた、より適切な推定手法や検定方法を選択できるようになる。