第 18 章 多変数回帰分析の理論

James H. Stock 著・Mark W. Watson 著・宮尾 龍蔵 訳

『入門計量経済学』（共立出版、2016）
https://www.kyoritsu-pub.co.jp/book/b10003746.html

2026-06-01

1. はじめに：行列表示の利点

なぜ行列代数を用いるのか？

- **簡潔さ**: 多数の説明変数を持つ複雑な回帰モデルを、非常にコンパクトな式で表現できる。
- **一般性**: 説明変数の数 k にかかわらず、同じ数式で理論を記述できる。
- **理解の深化**: OLS 推定量、t 統計量、F 統計量の本質的な構造をより深く理解できる。
- **高度な手法への拡張**: GLS（一般化最小二乗法）や GMM（一般化モーメント法）など、行列表示なしでは説明が困難な高度な計量手法を扱うための基礎となる。

2. 多変数回帰モデルの行列表現

ベクトルと行列の定義

n 個の観測値と k 個の説明変数を持つモデルを考える。

- **被説明変数ベクトル** $\mathbf{Y}$: $n \times 1$ 列ベクトル
- **説明変数行列** $\mathbf{X}$: $n \times (k+1)$ 行列（第 1 列は定数項の「1」）
- **係数ベクトル** β: $(k+1) \times 1$ 列ベクトル
- **誤差項ベクトル** $\mathbf{u}$: $n \times 1$ 列ベクトル

行列表記によるモデル

母集団の回帰モデルは以下のように一行で表される：

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$$

個々の観測値 i については：

$$Y_i = \mathbf{X}_i'\beta + u_i$$

ここで $\mathbf{X}_i'$ は行列 $\mathbf{X}$ の第 i 行である。

3. 拡張された最小二乗法の仮定

行列表記による 6 つの仮定

1. $E(\mathbf{u}|\mathbf{X}) = \mathbf{0}$: 誤差項の条件付き期待値はゼロベクトル。
2. **i.i.d.**: $(\mathbf{X}_i, Y_i)$ は独立かつ同一の分布から抽出。
3. **有限の 4 次モーメント**: 大きな異常値はほとんど起こらない。
4. **フル・ランク**: $\mathbf{X}$ は列に関してフル・ランク ($rank(\mathbf{X}) = k + 1$)。
   - これは「完全な多重共線性がない」ことと同値。
5. **均一分散**: $E(\mathbf{u}\mathbf{u}'|\mathbf{X}) = \sigma_u^2 \mathbf{I}_n$。
6. **正規分布**: $\mathbf{u}|\mathbf{X} \sim N(\mathbf{0}, \sigma_u^2 \mathbf{I}_n)$。

4. OLS 推定量

OLS 推定量の導出

残差平方和 $SSR(\mathbf{b}) = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\mathbf{b})$ を最小にする $\mathbf{b}$ を求める。

$\mathbf{b}$ に関する 1 次の条件（正規方程式）：

$$\mathbf{X}'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\hat{\beta}) = \mathbf{0}$$

これを解くと、OLS 推定量の行列形式が得られる：

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

誤差項を用いた表現

$\mathbf{Y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{u}$ を代入すると：

$$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

この式から、$\hat{\beta}$ の統計的性質（不偏性や一致性）を直接導き出すことができる。

5. OLS 推定量の漸近分布

一致性と漸近的正規性

- **一致性**: $n \to \infty$ のとき $\hat{\beta} \xrightarrow{p} \beta$。
  - $(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{X}) \xrightarrow{p} \Sigma_{\mathbf{XX}}$ かつ $(\frac{1}{n}\mathbf{X}'\mathbf{u}) \xrightarrow{p} \mathbf{0}$ より導かれる。
- **漸近的正規性**: 大標本において、$\hat{\beta}$ は以下の多変数正規分布に従う。

$$\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{d} N(\mathbf{0}, \Sigma_{\hat{\beta}})$$

  - 中心極限定理を用いて、$\mathbf{X}'\mathbf{u}$ の分布収束から導出される。

6. 効率性とガウス・マルコフの定理

多変数における BLUE

- **ガウス・マルコフの定理**: 均一分散（仮定 5）の下で、OLS 推定量 $\hat{\beta}$ は**最良線形不偏推定量 (BLUE)** である。
- 「最良」とは、他の不偏推定量の共分散行列 $\Sigma_{\tilde{\beta}}$ と $\hat{\beta}$ の共分散行列の差 $\Sigma_{\tilde{\beta}} - \Sigma_{\hat{\beta}}$ が正定値行列であることを意味する。

一般化最小二乗法 (GLS)

- 誤差項が不均一分散であったり、系列相関を持っていたりする場合（$E(\mathbf{uu}'|\mathbf{X}) = \Omega \neq \sigma^2\mathbf{I}$)、OLS は BLUE ではない。
- **GLS**: 誤差項の相関構造 Ω を用いてデータを変換し、変換後のデータに OLS を適用する手法。
- GLS は、一般的な誤差構造の下で最も効率的な推定量となる。

7. 結論

理論のまとめと応用

- 行列代数を用いることで、多変数回帰の推定と推論を一貫した枠組みで記述できる。
- OLS 推定量 $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$ は、計量経済学における最も基本的かつ重要な公式である。
- 行列表記による漸近理論（一致性と正規性）は、不均一分散にロバストな標準誤差や F 統計量の正当性を支える基盤となっている。
- 本章で学んだ行列形式の議論は、次章以降の時系列分析や操作変数法、GMM などの高度な理論を理解するための不可欠な「言語」となる。