The log of gravity

Silva, J. S., & Tenreyro, S. (2006). The log of gravity. *The Review of Economics and statistics*, *88*(4), 641-658.

作成：2018/9/10

要旨

- Jensenの不等式について知りながら、計量経済学の分析の際にはその含意を無視してきた。
- 不均一分散のもとでは、対数線形化したモデルをOLSで推定したパラメータは、真の弾力性のバイアスある推定値となる。
- 貿易の重力方程式を例にして、従来の推定値と本研究が提案する推定値を比較する。

1. 序論

- Jensen’s inequality

$$E(\ln\ y) \neq \ln\ E(y)$$

- 確率変数の対数値の期待値は、その確率変数の期待値の対数とは異なる。

Jensen's inequality
イェンゼンの不等式

イェンゼンの不等式（Jensen，凸関数の不等式）

$f(x)$ が凸関数のとき，

任意の $\lambda_i \geq 0,\ x_i\ (i = 1, \cdots, n),\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

に対して，

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i) \geq f(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i)$$

https://mathtrain.jp/jensen_proof

- 重力方程式のように弾力性一定のモデルは、multiplicative form （掛け算の形）で推定すべきである。
- 本研究は、pseudo-maximum-likelihood (PML) estimation techniqueを提案する。
- 不均一分散のもとでは、対数線形化したモデルをOLSで推定したパラメータには深刻なバイアスがある。
- たとえAnderson–van Wincoop (2003) の議論を踏まえて、固定効果を制御しても、不均一分散のもとでは、対数線形化したモデルをOLSで推定すると、バイアスのある推定値となる。

2. 重力方程式の計量経済学
A. 伝統的な重力方程式

$$T_{ij} = \alpha_0 Y_i^{\alpha_1} Y_j^{\alpha_2} D_{ij}^{\alpha_3}, \qquad (1)$$

Tij: 国iから国jへの輸出
Yi：輸出国のGDP
Yj：輸入国のGDP
Dij：貿易抵抗要因全て

重力方程式の確率版

$$T_{ij} = \alpha_0 Y_i^{\alpha_1} Y_j^{\alpha_2} D_{ij}^{\alpha_3} \eta_{ij}, \qquad (2)$$

ここで、ηij：エラー要因

$$E(\eta_{ij} | Y_i,\ Y_j,\ D_{ij}) = 1$$

対数線形化された重力方程式

$$\ln T_{ij} = \ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln Y_i + \alpha_2 \ln Y_j + \alpha_3 \ln D_{ij} + \ln \eta_{ij}. \tag{3}$$

対数線形化が正当であるには、
エラー項ln ηijが回帰変数と独立である必要がある。

しかし、実際には、重力方程式では、エラー項は不均一分散である。
そのため、独立性の仮定が満たされず、一致性のない推定値となる。

ゼロ貿易の処置

- 加えて、ゼロ貿易の処置が問題となる。
- T=0の観測値を捨てるのではなく、T+1を従属変数として用いるモデルを推定したり、tobitモデルを用いる研究もある。こうした手法も一致性のない推定値をもたらす。

B. The Anderson–van Wincoop Gravity Equation

$$T_{ij} = \alpha_0 Y_i^{\alpha_1} Y_j^{\alpha_2} D_{ij}^{\alpha_3} e^{\theta_i d_i + \theta_j d_j}, \qquad (4)$$

輸出国ダミー：di
輸入国ダミー：dj

モデルからα1とα2は1であると予測される。

$$T_{ij} = \alpha_0 Y_i Y_j D_{ij}^{\alpha_3} e^{\theta_i d_i + \theta_j d_j}$$

確率版は、以下の通り。

$$E(T_{ij} | Y_i, Y_j, D_{ij}, d_i, d_j) = \alpha_0 Y_i Y_j D_{ij}^{\alpha_3} e^{\theta_i d_i + \theta_j d_j}. \qquad (5)$$

III. Constant-Elasticity Models

弾力性が一定の経済モデル

$$y_i = \exp(x_i\beta)$$

➔条件付き期待値$E[y_i|x]$

例：重力モデル

$$T_{ij} = \exp[\ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln Y_i + \alpha_2 \ln Y_j + \alpha_3 \ln D_{ij}]$$

➔条件付き期待値 $E(T_{ij}|Y_i, Y_j, D_{ij})$

$$T_{ij} = \exp[\ln \alpha_0 + \alpha_1 \ln Y_i + \alpha_2 \ln Y_j + \alpha_3 \ln D_{ij}]$$

$$= \exp[\ln \alpha_0 + \ln Y_i^{\alpha_1} + \ln Y_j^{\alpha_2} + \ln D_{ij}^{\alpha_3}]$$

$$= \exp[\ln \alpha_0 Y_i^{\alpha_1} Y_j^{\alpha_2} D_{ij}^{\alpha_3}]$$

両辺対数とると、

$$\ln T_{ij} = \ln \alpha_0 Y_i^{\alpha_1} Y_j^{\alpha_2} D_{ij}^{\alpha_3}$$

よって

$$T_{ij} = \alpha_0 Y_i^{\alpha_1} Y_j^{\alpha_2} D_{ij}^{\alpha_3}$$

確率モデル

$$y_i = \exp(x_i\beta) + \varepsilon_i, \tag{6}$$

$$\text{with } y_i \geq 0 \text{ and } E[\varepsilon_i | x] = 0.$$

対数線形化して、OLSで推定すると、一致性ない。

1、yが0のとき、対数線形化できない。
2、対数線形化したエラーは説明変数に依存する。

A. 推定

非線形推定量（The NLS estimator）

$$\hat{\beta} = \arg\min_{b} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \exp(x_i b)]^2$$

first-order conditions

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \exp(x_i\hat{\beta})] \exp(x_i\hat{\beta})\, x_i = 0. \tag{8}$$

NLS の問題

- NLSはexp(xb)が大きい観測値によりウェイトを置く。
- しかし、そうした観測値の分散は大きい。
- そのため、ノイザーによりウェイトを置くことになる。
- よって、NLSは有効ではない。

PML推定量

- 条件付き分散が条件付き平均に比例するという仮定を置く。
- その上で、PML推定量を用いる。
- 一階の条件（PML）

$$\sum_{i=1}^{n} [y_i - \exp(x_i\tilde{\beta})]x_i = 0. \qquad (9)$$

- 標準的なNLSと比べて、PMLは、全ての観測値に同じウェイトを置く。

- この(9) 式で定義される推定量は、ポワソン擬似最尤法（the Poisson pseudo-maximum-likelihood (PPML) estimator）と数値的に等しい。

the PPML estimation

- Stataコマンド例

$$poisson\ export_{i,j}\ \ln(dist_{ij})$$
$$\ln Y_i\ \ln Y_j\ (other\ variables)_{ij},\ robust$$

where *export* (or *import*) is measured in levels.

V. The Gravity Equation

- 1990年の136カ国の横断面データ
- 136*135=18360の輸出の観測数
  - Feenstra et al. (1997)
- real GDP per capita and population
  - *World Development Indicators*
- 場所、国境、言語（公式）、植民地関係、水へのアクセス
  - CIA's (2002) *World Factbook*
- Remoteness—or relative distance
  - GDPでウェイトづけした他国への平均距離

PPML

TABLE 3.—THE TRADITIONAL GRAVITY EQUATION

Estimator: Dependent Variable:	OLS $\ln(T_{ij})$	OLS $\ln(1 + T_{ij})$	Tobit $\ln(a + T_{ij})$	NLS T_{ij}	PPML $T_{ij} > 0$	PPML T_{ij}
Log exporter's GDP	0.938**	1.128**	1.058**	0.738**	0.721**	0.733**
	(0.012)	(0.011)	(0.012)	(0.038)	(0.027)	(0.027)
Log importer's GDP	0.798**	0.866**	0.847**	0.862**	0.732**	0.741**
	(0.012)	(0.012)	(0.011)	(0.041)	(0.028)	(0.027)
Log exporter's GDP per capita	0.207**	0.277**	0.227**	0.396**	0.154**	0.157**
	(0.017)	(0.018)	(0.015)	(0.116)	(0.053)	(0.053)
Log importer's GDP per capita	0.106**	0.217**	0.178**	−0.033	0.133**	0.135**
	(0.018)	(0.018)	(0.015)	(0.062)	(0.044)	(0.045)
Log distance	−1.166**	−1.151**	−1.160**	−0.924**	−0.776**	−0.784**
	(0.034)	(0.040)	(0.034)	(0.072)	(0.055)	(0.055)
Contiguity dummy	0.314*	−0.241	−0.225	−0.081	0.202	0.193
	(0.127)	(0.201)	(0.152)	(0.100)	(0.105)	(0.104)
Common-language dummy	0.678**	0.742**	0.759**	0.689**	0.752**	0.746**
	(0.067)	(0.067)	(0.060)	(0.085)	(0.134)	(0.135)
Colonial-tie dummy	0.397**	0.392**	0.416**	0.036	0.019	0.024
	(0.070)	(0.070)	(0.063)	(0.125)	(0.150)	(0.150)
Landlocked-exporter dummy	−0.062	0.106*	−0.038	−1.367**	−0.873**	−0.864**
	(0.062)	(0.054)	(0.052)	(0.202)	(0.157)	(0.157)
Landlocked-importer dummy	−0.665**	−0.278**	−0.479**	−0.471**	−0.704**	−0.697**
	(0.060)	(0.055)	(0.051)	(0.184)	(0.141)	(0.141)
Exporter's remoteness	0.467**	0.526**	0.563**	1.188**	0.647**	0.660**
	(0.079)	(0.087)	(0.068)	(0.182)	(0.135)	(0.134)
Importer's remoteness	−0.205*	−0.109	−0.032	1.010**	0.549**	0.561**
	(0.085)	(0.091)	(0.073)	(0.154)	(0.120)	(0.118)
Free-trade agreement dummy	0.491**	1.289**	0.729**	0.443**	0.179*	0.181*
	(0.097)	(0.124)	(0.103)	(0.109)	(0.090)	(0.088)
Openness	−0.170**	0.739**	0.310**	0.928**	−0.139	−0.107
	(0.053)	(0.050)	(0.045)	(0.191)	(0.133)	(0.131)
Observations	9613	18360	18360	18360	9613	18360
RESET test p-values	0.000	0.000	0.204	0.000	0.941	0.331

全ての国ペア

全ての国ペア

FTAの効果

推定係数をbとすると、
各係数の効果は、以下の式で計算可能。

$$(e^{b_i} - 1) \times 100\%$$

	FTAの係数	exp(係数)	exp(係数)-1	[exp(係数)-1]∗100
OLS	0.491	1.63	0.63	63.4
PPML	0.181	1.20	0.20	19.8

Strikingly, in the traditional gravity equation, preferential-trade agreements play a much smaller—although still substantial—role according to Poisson regressions. OLS estimates suggest that preferential trade agreements raise expected bilateral trade by 63%, whereas Poisson estimates indicate an average enhancement below 20%.

TABLE 5.—THE ANDERSON–VAN WINCOOP GRAVITY EQUATION

Estimator: Dependent variable:	OLS $\ln(T_{ij})$	OLS $\ln(1 + T_{ij})$	Tobit $\ln(a + T_{ij})$	NLS T_{ij}	PPML $T_{ij} > 0$	PPML T_{ij}
Log distance	−1.347**	−1.332**	−1.272**	−0.582**	−0.770**	−0.750**
	(0.031)	(0.036)	(0.029)	(0.088)	(0.042)	(0.041)
Contiguity dummy	0.174	−0.399*	−0.253	0.458**	0.352**	0.370**
	(0.130)	(0.189)	(0.135)	(0.121)	(0.090)	(0.091)
Common-language dummy	0.406**	0.550**	0.485**	0.926**	0.418**	0.383**
	(0.068)	(0.066)	(0.057)	(0.116)	(0.094)	(0.093)
Colonial-tie dummy	0.666**	0.693**	0.650**	−0.736**	0.038	0.079
	(0.070)	(0.067)	(0.059)	(0.178)	(0.134)	(0.134)
Free-trade agreement dummy	0.310**	0.174	0.137**	1.017**	0.374**	0.376**
	(0.098)	(0.138)	(0.098)	(0.170)	(0.076)	(0.077)
Fixed effects	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes	Yes
Observations	9613	18360	18360	18360	9613	18360
RESET test p-values	0.000	0.000	0.000	0.000	0.564	0.112

PPML

全ての国ペア

全ての国ペア

		FTAの係数	exp(係数)	exp(係数)-1	[exp(係数)-1]*100
伝統的推定	OLS	0.491	1.63	0.63	63.4
伝統的推定	PPML	0.181	1.20	0.20	19.8
ANDERSON–VAN WINCOOP	OLS	0.31	1.36	0.36	36.3
ANDERSON–VAN WINCOOP	PPML	0.376	1.46	0.46	45.6