

Silva, J. S., & Tenreyro, S. (2006)

The Log of Gravity

The Review of Economics and Statistics, Vol. 88, No. 4,
pp.641-658.

資料作成: 田中鮎夢

2025-10-30

1. 導入：定数弾力性モデルとイェンセンの不等式

論文の核心

- ▶ 経済学者は長年イェンセンの不等式の存在を知っていた。
- ▶ しかし、多くの計量経済学の応用、特に対数線形化モデルをOLSで推定する伝統的な慣行は、その重要な含意を無視してきた。
- ▶ **重要なテーマ：不均一分散 (Heteroskedasticity)** の存在下では、対数線形化モデルのOLS推定パラメータを弾力性として解釈すると、**深刻なバイアス**が生じる。

定数弾力性モデルの定式化

重力方程式などの経済理論が提案する**定数弾力性モデル**は、非負の変数 y の**条件付き期待値**として解釈される。

$$E[y|x] = \exp(x\beta) \quad (6)$$

* ここで、 $\exp(x\beta)$ は、説明変数 x が与えられたときの y の条件付き期待値 $E[y|x]$ 。

貿易の重力方程式の例

$$T_{ij} = \beta_0 Y_i^{\beta_1} Y_j^{\beta_2} D_{ij}^{\beta_3} \epsilon_{ij}$$

- ▶ T_{ij} : 国 i から国 j への貿易フロー
- ▶ Y_i, Y_j : 国 i と国 j の GDP
- ▶ D_{ij} : 国 i と国 j の地理的距離
- ▶ ϵ_{ij} : 誤差項

2. 伝統的な推定方法の根本的な問題

問題点 (1)：ゼロ値の処理

従来 of 慣行では、式を対数変換して OLS を行う：

$$\ln y = x\beta + \ln \epsilon$$

- ▶ 貿易フロー T のように**ゼロ値**を持つ観測がある場合、 $\ln(T)$ は計算できず、アプローチが**実行不可能 (Infeasible)** となる。
- ▶ ゼロ値を**削除**する (サンプルの切り捨て)、 $\ln(T + 1)$ を使う、**トービット推定量**を使うといった手法は、**一般的に不一致な推定量**となる。

問題点 (2) : 不一致性 (Inconsistency) の原因

- ▶ 確率的モデルにおいて、対数変換を行うと、誤差項 $\ln \epsilon$ が x と相関を持つことが問題。
- ▶ OLS 推定量が一致性を持つためには、 $\ln \epsilon$ が x と無相関であるという非常に制約的な条件が必要。
- ▶ 不均一分散が存在する場合、誤差項 ϵ の分散は x に依存し、したがって $\ln \epsilon$ の期待値も x に依存。
- ▶ この結果、OLS 回帰はパラメータ β に対して一般的に不一致 (バイアスを持つ) な推定量となる。

3. PPML (Poisson Pseudo Maximum Likelihood) 推定量の提案

PPML の基本と頑健性

- ▶ 論文では、モデルを対数変換せずに条件付き期待値 $E[y|x] = \exp(x\beta)$ を直接推定する疑似最尤 (PML) 推定技術を提案。
- ▶ これは、ポアソン疑似最尤 (PPML) 推定量と数値的に同じ。
- ▶ 一致性の根拠: PPML は、 y の正確な分布 (ポアソン分布である必要はない) ではなく、条件付き平均の特定化 $E[y|x] = \exp(x\beta)$ が正しい場合にのみ一致性を持つ。
- ▶ 不均一分散への頑健性: PPML は、OLS がバイアスを受ける様々な不均一分散のパターンに対して頑健であることがシミュレーションで示された。

PPML と他の推定量の比較

- ▶ **非線形最小二乗法 (NLS):** NLS は一致推定量だが、大きな条件付き平均（分散も大きい）を持つ観測値により**大きな重み**を与えるため、**非常に非効率的**になりがち。
- ▶ **PPML の重み:** PPML は、条件付き分散が条件付き平均に比例する ($V[y|x] \propto E[y|x]$) と仮定することにより、**すべての観測値に同じ重みを与える**ため、不均一分散が存在する場合でも NLS より効率的である可能性が高くなる。
- ▶ **ゼロ値の処理:** PPML は、ゼロ値を持つ観測値に対しても自然に対応できる。

4. 実証結果：伝統的手法との定量的・定性的な違い

不均一分散の検証

- ▶ 実証分析の結果、従来の重力方程式、および **Anderson–van Wincoop (AvW) の重力方程式**（固定効果を含む）のいずれにおいても、対数線形化モデルの誤差項に**圧倒的な不均一分散の証拠**が発見された。
- ▶ **RESET テスト**などの検定も、対数線形化モデルの特定化が不適切であることを**体系的に示した**。

推定結果の大きな違い

PPML と OLS (対数線形化) の推定値を比較すると、**定量的かつ定性的に重要な違いが確認された。**

要因	OLS (対数) 推定値	PPML 推定値	結論 (2006 年論文)
距離の弾力性 (AvW)	約 -1.35	約 -0.75	OLS は地理的距離の役割を大きく誇張する。
GDP の弾力性 (伝統的)	約 0.94 - 0.80	約 0.73 - 0.74	OLS は弾力性が 1 に近いと推定するが、PPML は著しく小さい。
植民地関係 (AvW)	強く正 (約 100% 増加)	統計的に非有意	OLS は植民地紐帯の役割を誇張する。
推定バイアス	深刻なバイアスが生じ、モデルの解釈を歪める。	頑健性が高い。	

まとめ

- ▶ この結果は、バイアスの主な原因がデータの切り捨て（ゼロ値の削除）ではなく、**不均一分散**であることを示唆。
- ▶ **提言**：ヘテロスケダスティシティの証拠がある場合、PPMLを標準的な対数線形モデルの代替として使用すべき。

確認問題

問 1

Santos Silva and Tenreyro (2006) が、伝統的な重力方程式の推定において、対数線形化と OLS の組み合わせが**バイアス**を生む主な理論的原因として指摘したのはどれか。

- A. モデルがパネルデータ構造を持つこと。
- B. OLS 推定量が、データの不均一分散（ヘテロスケダスティティ）の存在下で一致性をもたないこと。
- C. 説明変数の間に強い多重共線性があること。
- D. 使用されるサンプルのサイズが小さすぎること。

問2

対数線形化アプローチが直面する、より**深刻ではないが避けて通れない問題**であり、OLSの適用を不可能にするのはどれか。

- A. 誤差項が正規分布に従わないこと。
- B. 従属変数（貿易フローなど）がゼロ値を持つ観測が存在すること。
- C. 多国間抵抗項をモデルに組み込めないこと。
- D. NLS推定量よりも計算が複雑であること。

問3

対数線形化されたモデル $\ln y = x\beta + \ln \epsilon$ を OLS で推定した場合、その推定量がパラメータ β に対して一致性を持つために必要な**非常に制約的な条件**はどれか。

- A. 誤差項 ϵ が常に正規分布に従うこと。
- B. ϵ が厳密に定数弾力性モデルに従うこと。
- C. 変換された誤差項 $\ln \epsilon$ が説明変数 x と統計的に無相関であること。
- D. サンプルサイズが無限大に近づくこと。

問 4

PPML (Poisson Pseudo Maximum Likelihood) 推定量が「擬似 (Pseudo)」最尤と呼ばれるのはなぜか。

- A. 推定が非常に迅速であるため。
- B. ゼロ値の観測値を無視するため。
- C. その一致性が、従属変数 y が実際にポアソン分布に従うという仮定に依存しないため。
- D. 非線形な最小二乗法を近似しているため。

問5

PPML 推定量と非線形最小二乗法 (NLS) 推定量を比較した場合、PPML がより推奨される理由として、シミュレーションと理論の両方で指摘された事実はどれか。

- A. NLS はゼロ値を処理できないため、PPML が常に計算しやすい。
- B. NLS が不一致であるのに対し、PPML は常に一致推定量である。
- C. NLS は大きな条件付き平均を持つ（ノイズの多い）観測値に過大な重みを与えるため、非常に非効率的になる傾向がある。
- D. PPML は NLS よりも分散の大きい観測値に大きな重みを与えるため。

問 6

Santos Silva and Tenreyro (2006) が提示した実証結果によると、従来の OLS（対数線形化）は PPML と比較して、地理的距離の貿易に対する阻害効果をどのように推定したか。

- A. OLS は PPML よりも距離の弾力性を体系的に小さく推定した。
- B. OLS は PPML よりも距離の弾力性を大幅に大きく（負の値として絶対値が大きく）推定した。
- C. OLS は距離の効果を非有意と推定したが、PPML は有意な効果を見つけた。
- D. 両者の距離の弾力性推定値は、固定効果を含めてもほとんど差がなかった。

問 7

Anderson–van Wincoop (AvW) の重力方程式（起点・終点固定効果を含む）を推定する際、OLS 推定量と PPML 推定量で最も顕著に結果が分かれた要因の一つはどれか。

- A. 共通言語ダミーの効果。
- B. 共通植民地紐帯ダミーの効果。
- C. 貿易協定ダミーの効果。
- D. 輸出国の GDP の効果。

問 8

PPML は、そのロバスト性と優位性を確認するために、どのような種類の統計的検定によって体系的に支持されたか。

- A. ドゥービン・ワトソン検定 (Durbin-Watson test)。
- B. コルモゴロフ-スミルノフ検定 (Kolmogorov-Smirnov test)。
- C. RESET 検定 (Ramsey's RESET test)。
- D. ハウスマン検定 (Hausman test)。

問 9

PPML 推定量は、その定式化において、条件付き分散 $V[y|x]$ が条件付き平均 $E[y|x]$ のどのような関数形であると暗黙的に仮定しているか。

- A. $V[y|x]$ は $E[y|x]$ の二乗に比例する。
- B. $V[y|x]$ は x と無関係な定数である。
- C. $V[y|x]$ は $E[y|x]$ に比例する。
- D. $V[y|x]$ は正規分布に従う。

問 10

Santos Silva and Tenreiro (2006) は、重力方程式が Anderson–van Wincoop (AvW) の仕様に従って推定された場合でも、不均一分散の存在は依然として重要であるという証拠を見つけたが、これはどのような経験的証拠によって裏付けられたか。

- A. NLS 推定量が計算できなくなったこと。
- B. サンプルサイズが減少したこと。
- C. ホワイト検定 (White's test) が不均一分散の帰無仮説を強く棄却したこと。
- D. ゼロ値の観測値が完全に消滅したこと。

解答

1. B
2. B
3. C
4. C
5. C
6. B
7. B
8. C
9. C
10. C

<解説> RESET 検定

RESET 検定とは何か

RESET 検定 (Ramsey's RESET test) とは、回帰分析における**条件付き期待値の特定化が正しいかどうか** (すなわちモデルが正しく設定されているか) を確認するための**仕様誤り検定**の一つである。

特に、従来の対数線形化モデルを OLS (最小二乗法) で推定する慣行の妥当性を評価するために使用されている。

RESET 検定の主な目的は、**条件付き期待値の関数形が正しいかどうか**を検証することである。具体的には、モデルに**非線形性**が欠けていないかを確認するものである。

検定の実行方法

RESET 検定は、以下の手順に基づいて実施される。

1. **推定済みの値を使用:** まず、元の回帰モデルを推定し、そこから従属変数の推定値ベクトル \hat{y} (または線形予測値 $x\hat{\beta}$) を取得する。
2. **補助変数の作成:** この推定値を用いて、新しい回帰モデルに追加の回帰変数を構築する。通常、これは推定値の2乗 $(x\hat{\beta})^2$ や3乗 $(x\hat{\beta})^3$ などのべき乗項である。
3. **検定:** 追加されたべき乗項の係数が統計的に有意であるかどうかを検定する。

これらの追加項が有意である場合、元のモデルの条件付き期待値の特定化が不適切である (誤って指定されている) ことを示す。

重力方程式における適用と結果: OLS

Santos Silva and Tenreyro (2006) は、重力方程式の推定において、従来の推定方法（対数変換＋OLS）と、提案するPPML（ポアソン擬似最尤）推定量の妥当性を比較するためにRESET検定を用いている。

▶ OLS（対数線形化）の結果:

- ▶ 伝統的な重力方程式およびAnderson–van Wincoop (AvW) の重力方程式（固定効果を含む）の両方において、OLS回帰の結果は**RESET検定によって棄却**された。
- ▶ 具体的には、OLS回帰ではp値が0.000となり、**対数特定化を使用したモデルが不適切である**ことが示された。
- ▶ この結果は、対数線形化モデルの特定化が**体系的に不適切である**ことを示しており、**不均一分散**の存在と合わせて、OLS推定が深刻なバイアスを持つことを裏付けている。

重力方程式における適用と結果: PPML

▶ PPML (ポアソン回帰) の結果:

- ▶ PPML を用いて推定されたモデルは、伝統的な仕様および AvW 仕様の両方で、**RESET 検定に合格**した。
- ▶ PPML 推定値を用いた場合、検定変数の係数が 0 であるという帰無仮説を棄却する証拠は得られず、**モデルの特定化に誤りがある**という証拠は提供されなかった。

頑健性について

この検定を実施する際には、誤差項に不均一分散が存在する可能性が高いため、推定されたモデルの妥当性をより確実に評価する目的で、**不均一分散に対して頑健な RESET 検定** (heteroskedasticity-robust RESET test) が実行されている。