

The Log of Gravity at 15

資料作成：田中鮎夢

2025-10-02

Contents

要旨	1
1 イントロダクション	1
2 問題点	2
3 PPML 推定量	3
3.1 なぜカウントデータの他の推定量を使用しないのか	3
3.2 PPML、固定効果、および付随パラメータ問題	4
3.3 計算上の側面	4
3.4 PPML と構造重力モデル	5
5 シミュレーションと応用	6
6 他の文脈における PPML 推定量	7
7 結論	8
References	8

要旨

我々は「The Log of Gravity」(Santos Silva and Tenreyro, *Rev Econ Stat* 88:641–658, 2006) の貢献をレビューし、その後の文献における主要な結果を要約し、重力方程式およびその他の定数弾力性モデルの推定における最新技術の簡単なレビューを提供する。

Santos Silva, J. M. C., & Tenreyro, S. (2022). The Log of Gravity at 15. *Portuguese Economic Journal*, 21(3), 423–437. <https://doi.org/10.1007/s10258-021-00203-w>

1 イントロダクション

発表から 15 年が経過した今、我々の論文「The Log of Gravity」(Santos Silva and Tenreyro 2006) の影響について振り返るには、おそらく良い時期であろう。¹ その論文において我々は、定数弾力性モデルを対数線形化した形で推定するという長年確立されてきた慣行に異議を唱え、代替手段として、Gourieroux et al. (1984) のポアソン擬似最尤 (PPML) 推定量と都合よく一致する推定量の使用を提案した。Goldberger (1968)、Papke and Wooldridge (1996)、および Manning and Mullahy (2001) の初期の貢献を基礎として、Santos Silva and Tenreyro (2006) では、対数線形化モデルの推定がなぜ誤解を招く結果につながる可能性があるのかについて明確な説明を示し、PPML 推定量の使用について明確な推奨を行い、この推定量の利点を明瞭に例証した。我々の見解では、論文のシンプルなメッセージと、我々が提供した例の明確性と関連性が、その人気の鍵となる要因であった。²

¹Google Scholar によれば、この論文は 2020 年だけで 750 件以上の引用を受けた。

²論文の人気を説明するもう一つの理由は、我々が数百通もの質問メールに返信し、現在も返信を続けており、常に利用者へのサポートを提供しようと努めていることである。また、データ、コード、および最も頻繁に寄せられる質問への回答を提供する専用ウェブサイトも作成した。

本論文では、「The Log of Gravity」の影響力の理由を考察し、その持続的な関連性に寄与したいいくつかの発展を要約する。これを行うにあたり、貿易の重力方程式の推定における最新技術の簡潔なレビューを提供するが、これは経験の浅い研究者にとって有用であろう。我々が議論する手法や発展の多くは、他の種類のデータに対する定数弾力性 (乗法的) モデルの推定にも関連しており、我々はこれらの応用のいくつかにも言及する。

本論文の残りの部分は以下のように構成されている。第2節では重力方程式の伝統的な最小二乗推定量の問題を簡潔に提示し、第3節ではPPML推定量のいくつかの側面を議論する。第4節では重力モデルの特異性検定を議論し、第5節ではSantos Silva and Tenreyro (2006)で提示したシミュレーションと実証分析の結果をレビューする。第6節では異なる分野におけるPPML推定量の使用例を提供し、最後に第7節でいくつかの簡潔な結論的所見を述べる。

2 問題点

Goldberger (1991, p. 5) に従い、Santos Silva and Tenreyro (2006) では、重力方程式のような非確率的経済モデルを、関心のある変数の条件付き期待値として解釈する。³つまり、経済理論が非負の変数 y と説明変数のベクトル x が次のような定数弾力性モデルの形で結びついていることを示唆する場合、

$$y = \exp(x\beta) \quad (1)$$

関数 $\exp(x\beta)$ は、 x が与えられたときの y の条件付き期待値、すなわち $E[y | x]$ として解釈され、ここで (準) 弾力性のベクトル β が関心の対象となる。この種のモデルの例として貿易の重力方程式があり、その最も単純な形は次のように書くことができる:

$$T = \beta_0 Y^{\beta_1} D^{\beta_2} \quad (2)$$

$$= \exp[\ln(\beta_0) + \beta_1 \ln(Y) + \beta_2 \ln(D)] \quad (3)$$

ここで、 T は起点から終点への貿易フローを表し、 Y は貿易相手国の規模の尺度、 D は相手国間の距離を表し、 β_0 、 β_1 、 β_2 は未知のパラメータである。

我々が知る限りすべての計量経済学の教科書は、式1のようなモデルのパラメータは、 $\ln(y)$ を x に対して最小二乗回帰することで推定できると示唆している。しかしながら、このアプローチは2つの理由で不適切である可能性がある。明らかな問題、そして我々が代替推定量を検討する最初の動機となったのは、いくつかの観測値で y がゼロである場合、このアプローチが実行不可能になることである。より深刻な問題は、イェンセンの不等式により、 $\ln(y)$ を x に対して最小二乗回帰することが、一般的に $E[y | x] = \exp(x\beta)$ のパラメータに対する不一致推定量となることである。⁴

対数での回帰が一般的に妥当でない理由を理解する鍵となる洞察は、式1からその対数形式へ、またその逆へと移行できるものの、それらの確率的対応物については同じことが言えないということである。実際、経済モデルは厳密には成立しないため、推定は経済理論によって示唆される方程式の確率的バージョンを用いて行われなければならない、そこでイェンセンの不等式が重要になる。

式1の確率的対応物は次のように書くことができる:

$$y = \exp(x\beta) + \varepsilon = \exp(x\beta)\eta \quad (4)$$

ここで、 ε は $E[\varepsilon | x] = 0$ を満たす加法的誤差項であり、 $\eta = 1 + \varepsilon / \exp(x\beta)$ は $E[\eta | x] = 1$ を満たす乗法的誤差項である。⁵ y がゼロになり得ることを一旦無視すると、式の両辺の対数をとることでモデルをパラメータに関して線形にすることができ、次のようになる:

$$\ln(y) = x\beta + \ln(\eta) \quad (5)$$

³あるいは、モデルは条件付き中央値や条件付き最頻値のような異なる中心傾向の尺度として解釈することもできる。しかしながら、データに多くのゼロが含まれる可能性がある場合、条件付き期待値はより魅力的な位置尺度である。

⁴この不一致性は多くの実証的文脈においては小さく、それが対数線形モデルの最小二乗法による推定が依然として非常に人気がある理由を説明している。しかしながら、Santos Silva and Tenreyro (2006) で例証したように、この不一致性は実質的に大きくなる可能性があり、したがって今日ではこの推定量の継続的な使用を正当化することは困難である。

⁵我々は、なぜ式1の確率的バージョンを $y = \exp(x\beta + \varepsilon)$ と書かないのかとよく尋ねられる。そうしない理由は、この場合、 y の条件付き期待値は一般的に $\exp(x\beta)$ で与えられないため、この表現は式1の適切な確率的バージョンではないからである。

式 5 において、最小二乗推定量は、 $\ln(\eta)$ が x と無相関である場合に β に対して一致性を持つが、 $\eta = 1 + \varepsilon/\exp(x\beta)$ であるため、その条件は ε の分布に関する非常に制約的な条件下でのみ満たされる。したがって、式 5 で定義される回帰の最小二乗推定量は一般的に β に対して不一致である。⁶次節では、 β を推定するための代替的アプローチを検討し、なぜ PPML が望ましいのかを説明する。

3 PPML 推定量

一見すると、モデルを変換せずに $E[y | x] = \exp(x\beta)$ を推定する自然なアプローチは、Frankel and Wei (1993) が行ったように、非線形最小二乗法を使用することであろう。このアプローチの問題点は、Santos Silva and Tenreyro (2006) で指摘したように、それが次の形式のモーメント条件に基づいていることである：

$$E[\exp(x\beta)(y - \exp(x\beta))x] = 0,$$

これは分散が大きい観測値により大きな重みを与えるため、実証分析において使い物にならないほど非効率になる可能性がある。この問題は、いくつかのシミュレーション研究で記録されている。例えば、Manning and Mullahy (2001) および Santos Silva and Tenreyro (2006, 2011a) を参照。

Santos Silva and Tenreyro (2006) で我々が提案した代替案は、推定量を次の形式のモーメント条件に基づかせることである：

$$E[(y - \exp(x\beta))x] = 0, \tag{6}$$

これはすべての観測値に同じ重みを与える。以下で議論するように、直感的に魅力的であることに加えて、この推定量はこの文脈において特に魅力的な他のいくつかの性質を持っている。

式 6 に基づく推定量の利点の一つは、それがポアソン回帰推定量と一致することであり、したがってほとんどの統計ソフトウェアには、その使用を非常に簡単にするコマンドがある。もちろん、貿易データの応用において y は確実にポアソン分布に従わないため、これは擬似最尤推定量である (Gourieroux et al. 1984 を参照)。そして、適切に頑健な標準誤差の推定量を使用すべきである。

3.1 なぜカウントデータの他の推定量を使用しないのか

Santos Silva and Tenreyro (2006) において、重力方程式はカウントデータ用に設計された手法を用いて推定されるべきだと推奨したという事実は、いくつかの誤解を生み出した。

カウントデータモデルでは、研究者はしばしば、 $\Pr(y = k | x)$ のような何らかの事象の条件付き確率の推定に興味を持つ。ここで、 k は非負の整数である。この確率の一致推定量を得るためには、 y の条件付き分布を正しく特定する必要があり、ポアソン分布はこの目的には制約が厳しすぎるとしばしば見なされる。したがって、カウントデータモデルを推定するために、異なる分布に基づく代替手法が提案されており、これらのアプローチの多くは基本的なポアソン回帰よりも柔軟である。このことから、一部の著者は、重力方程式の推定を目的とする場合にも、これらの推定量が PPML 推定量を上回る性能を発揮すると主張するようになった。以下で説明するように、これは誤りである。

まず注目すべきことは、重力方程式を推定する際、我々は非常に穏やかな仮定の下で妥当な $E[y | x] = \exp(x\beta)$ の推定量を得たいのであり、 $\Pr(y = k | x)$ のような量を推定する必要はないということである。したがって、一致性が付随的な分布の仮定に依存する β の推定量は、一致性が $E[y | x] = \exp(x\beta)$ という仮定、つまり重力方程式が正しく特定化されているという仮定の妥当性だけに依存する PPML 推定量ほど魅力的ではない。⁷したがって、例えば Mullahy (1986) によって導入されたゼロ過剰カウントデータモデルの推定量を用いて重力方程式を推定することは、この文脈では魅力的ではない。なぜなら、推定量の妥当性がデータの分布に関する非常に強い仮定に依存することになるからである。

注目すべきもう一つの側面は、カウントデータモデルの文脈において、ポアソン回帰に対する代替手法のほとんどが、いわゆる過分散を許容することである (例えば、Cameron and Trivedi, 2013 を参照)。しかし

⁶Wooldridge (1992) も参照。あるいは、 y が厳密に正である場合、式 5 の最小二乗推定量を、条件付き幾何平均のパラメータの一致推定値を提供するものとして解釈することができる。これらは β とは大きく異なる可能性があり、符号さえ異なる場合もある (Reis and Santos Silva (2006), Petersen (2017), Mitnik and Grusky (2020), Dias and Marques (2021) を参照)。しかしながら、 y がゼロになり得る場合、幾何平均は中心傾向の興味深い尺度ではない。なぜなら、 $\Pr(y = 0 | x) > 0$ のとき、それは恒等的にゼロとなるからである。

⁷これは、式 4 においてランダム攪乱項が $E[\varepsilon | x] = 0$ を満たす限り、PPML は一致性を持つと述べることと等価であり、これは $E[\eta | x] = 1$ を意味する。 ε と η の分布に関する追加の仮定は必要ない。

ながら、従属変数が自然なスケールを持たない場合、過分散は定義されない。実際、従属変数が異なる単位で測定できる場合、条件付き平均と条件付き分散の関係はデータのスケールに依存する。これは、過分散を許容するモデルを用いて得られた推定値が従属変数のスケールとそれが測定される単位に敏感であり、したがって恣意的であることを意味する。この問題は、負の二項推定量の場合について Bosquet and Boulhol (2014) によって指摘されたが、一部の著者によって使用が推奨されているゼロ過剰モデルのような、過分散に対応しようとするすべての推定量に影響を与える。

3.2 PPML、固定効果、および付随パラメータ問題

Anderson and van Wincoop (2003) の先駆的研究以来、各起点に対するダミー変数と各終点に対するダミー変数、いわゆる起点固定効果と終点固定効果を含めることで、多国間抵抗を考慮して重力方程式を推定することが標準となった (Hummels, 1999 も参照)。この場合、推定すべきパラメータの数はサンプルに含まれる国の数に依存するため、付随パラメータ問題を考慮する必要がある。なぜなら、一般的に、パラメータの数がサンプルサイズに依存するモデルでは、一致推定量を得ることができないからである (例えば、Lancaster, 2000 を参照)。

PPML は、単一の固定効果が含まれる伝統的なパネルデータの場合において、付随パラメータ問題に悩まされないことはよく知られている。Wooldridge (1999) を参照。その結果は 2 組の固定効果を持つモデルをカバーしていないため、一部の著者は、モデルに起点固定効果と終点固定効果が含まれる場合、PPML は付随パラメータ問題に悩まされると主張してきた。しかしながら、その主張は誤りである。実際、Fernández-Val and Weidner (2016, p. 301) は、2 組の固定効果のサイズが同じ率で増加し、回帰変数が厳密に外生的または所与である限り、2 組の固定効果を持つモデルにおいて、PPML は付随パラメータ問題の影響を受けないことを示した。

PPML は双方向重力モデルにおいて一致性を持つが、クラスタリングを考慮した共分散行列の通常の推定量は、付随パラメータ問題により無効である (例えば、Egger and Staub (2015)、および Jochmans (2017) を参照)。Weidner and Zylkin (2020) はこの問題に対する解決策を提供している。⁸

Baier and Bergstrand (2007) の提案に従い、研究者は時に、起点-時間固定効果と終点-時間固定効果、さらにペア固定効果を含む三方向重力モデルを推定するためにパネルデータを使用する。この文脈における PPML 推定量の一致性は Fernández-Val and Weidner (2016) の結果からは導かれませんが、Weidner and Zylkin (2020) は最近、この文脈においても PPML が依然として一致性を持つことを示した。注目すべきことに、Weidner and Zylkin (2020) はまた、PPML が擬似最尤推定量のファミリーの中でこの性質を持つ唯一のメンバーであることも示している。Weidner and Zylkin (2020) はさらに、推定量の漸近バイアスと漸近標準偏差が同じ速度で消失するため、三方向重力モデルにおいては標準的な有意性検定と信頼区間が無効であることを示している。Weidner and Zylkin (2020) はこの問題に対する解決策を提案しており、詳細については関心のある読者を彼らの論文に紹介する。

Baier and Bergstrand (2007) が第三の固定効果を導入する動機は、自由貿易協定の内生性の可能性を制御することである。この問題に対処する別の方法は、操作変数法を使用することであるが、この文脈で使用できる説得力のある操作変数を見つけることは困難である。さらに、内生的な回帰変数を持つ重力モデルの推定は困難である。なぜなら、PPML 推定量の操作変数版 (Mullahy 1997; Windmeijer and Santos Silva 1997) は付随パラメータ問題に悩まされるため、固定効果を含むモデルの推定に使用できないからである。しかしながら、Jochmans (2017) の推定量は起点固定効果と終点固定効果を除去するため、この文脈で使用することができ、したがって付随パラメータ問題に悩まされない。Jochmans and Verardi (2019) は、横断面データで推定される双方向固定効果を持つ重力方程式の場合について、Jochmans (2017) の操作変数推定量を実装する Stata コマンドを提示している。

3.3 計算上の側面

PPML 推定量の利点の一つは、その目的関数が大域的に凹関数であるため、せいぜい 1 つの最大値しか持たないことである。問題は、擬似対数尤度関数が最大値を持たない場合があり、したがって推定値が存在しない場合があることである。発見的には、この問題は、従属変数がゼロである観測値の一部を完全に予測する回帰変数の存在によって引き起こされ、それらの係数の最尤推定量が (負の) 無限大に向かうことを意味する。

⁸クラスタリングを考慮することは、これは Santos Silva and Tenreyro (2006) では行わなかったことだが、研究者に関連するクラスタリング構造を定義することを要求する。標準的な実践 (例えば、Yotov et al. (2016) を参照) は、ペア識別子によってクラスタリングすることであるが、他のアプローチも提案されている (例えば、Egger and Tarlea 2015 を参照)。これは重要な問題であり、この種のデータにおける潜在的に複雑な依存パターンが存在する場合に、標準誤差を最もよく推定する方法について、さらなる研究が必要である。

完全予測子 (perfect predictors) の存在がロジットのような二値選択モデルの最尤推定値の非存在につながる可能性があることはよく知られているが (例えば、Albert and Anderson, 1984 を参照)、そのような問題が PPML やトービットのような他の推定量にも影響を与えることはあまり知られていない。

Santos Silva and Tenreyro (2010) において、我々はこの問題を説明し、この問題を検出し解決する単純な方法を提供した。その後、Santos Silva and Tenreyro (2011b) において、収束問題につながる可能性のある他の数値的問題を説明し、Santos Silva and Tenreyro (2010) で議論された方法を実装する `ppml Stata` コマンドを導入した。

より最近では、Correia et al. (2019) がこの問題を再検討し、Verbeek (1989, 1992) および Wedderburn (1976) によるはるかに以前の貢献を基礎として、PPML 推定値の非存在を検出するアルゴリズムの洗練されたバージョンを提示した。この方法と、非存在問題に対する関連する解決策は、彼らの `ppmlhdfc Stata` コマンド (Correia et al. 2020) に実装されている。実際には、`ppml` と `ppmlhdfc` の両方が非存在問題に効果的に対処しているため、今日ではこれは実証分析において深刻な問題ではない。

Correia et al. (2019) の論文における興味深い結果は、ポアソン回帰がかなり特殊であり、推定値の非存在に対する解決策が、ガンマや逆ガウス擬似最尤推定量のような関連する推定量の場合よりも単純であることである。したがって、これは非負データに対する他の一般化線形モデルよりも PPML を選好するもう一つの理由である。

PPML 推定値の非存在は、起点固定効果と終点固定効果を持つモデルのような、多数のダミー変数を持つモデルにおいて特に発生しやすい。非存在自体は問題ではないが、推定しなければならないパラメータの数が膨大であるため、これらのモデルの推定は困難である。Correia et al. (2020) は、彼らの `ppmlhdfc Stata` コマンドにおいてこの問題に対処している。Guimarães and Portugal (2010) による以前の結果とフレッシュ-ワウ-ラベル定理を組み合わせて、Correia et al. (2020) は、複数組の固定効果を持つモデルの PPML による推定を大幅に簡素化するアルゴリズムを開発した。⁹

3.4 PPML と構造重力モデル

重力方程式は、貿易フローを記述し、貿易政策の部分均衡効果を評価するための信頼できる方法を提供する。第三国への貿易政策の効果を無視する部分均衡分析を超えるためには、貿易政策の一般均衡効果を考慮に入れた構造重力モデルが必要である。

Anderson and van Wincoop (2003) は、多国間抵抗チャネルを通じた効果を考慮することにより、貿易政策の一般均衡分析を可能にする構造重力モデルを導入した。Anderson and van Wincoop (2003) は非線形手法を用いて彼らの構造重力モデルを推定するが、代替手段は、Hummels (1999) が行ったように、標準的な重力方程式に起点固定効果と終点固定効果を含めることであると指摘している。しかしながら、一般的には、推定された固定効果が多国間抵抗指数の定義および彼らが満たすべき均衡条件と整合的であるという保証はない。注目すべきことに、Fally (2015) は、合理的な仮定の下で、重力方程式が PPML によって推定される場合、推定された固定効果が自動的にこれらの条件を満たすことを実証した。したがって、多国間抵抗指数は推定された固定効果から回復できる。さらに、Fally (2015) はまた、PPML がこの性質を持つ唯一の擬似最尤推定量であることも示している。

Fally (2015) の結果を基礎として、Anderson et al. (2018) は、構造重力モデルと PPML 推定量の性質に基づいて貿易政策の一般均衡効果を計算する方法を提案している。Yotov et al. (2016) も参照。

4 特定化検定 一般的に、定数弾性モデルは、Gourieroux et al. (1984) によって導入された擬似最尤推定量のいずれかを用いて一致的に推定することができる。これらの推定量はすべて同じ穏やかな条件の下で一致性を持つため、研究者はこのファミリーの中で最良の推定量、すなわちより効率的な擬似最尤推定量を選択するために特定化検定を使用することができる。Manning and Mullahy (2001) は、この目的のために伝統的な Park (1966) 検定が使用できることを示唆したが、Santos Silva and Tenreyro (2006) において我々は、この検定がこの文脈では一般的に無効であることを指摘し、代替的なアプローチを提案した。しかしながら、以下で説明するように、Manning and Mullahy (2001) が示唆した Park (1966) 検定も、Santos Silva and Tenreyro (2006) で我々が提案した検定も、重力方程式を推定する際にはほとんど役に立たない。

前節で述べたように、PPML 推定量は、非常に穏やかな仮定の下で妥当であり、高次元固定効果を持つモデルにおいて妥当であり、推定値の非存在の可能性によって悪影響を受けず、その結果が構造重力モデルと整合的である唯一の重力方程式の擬似最尤推定量である。したがって、重力方程式のための擬似最尤推定量を選択する際には、実際にはあまり選択肢がなく、PPML が唯一の信頼できる選択肢である。言い換えれば、PPML は固定効果を持つモデルにおいて妥当で、構造重力モデルと整合的な擬似最尤推定量のクラスにおいて効率的である。したがって、Manning and Mullahy (2001) および Santos Silva and Tenreyro

⁹R 言語における同等のパッケージについては、Bergé (2018)、Stammann (2018)、および Hinz et al. (2019) を参照。

(2006)で提案されたような、条件付き平均と条件付き分散の関係をチェックする検定は、重力方程式を推定する目的においては冗長であり、この文脈では何の目的も果たさない。¹⁰

Santos Silva and Tenreyro (2006)において、我々はモデルの特定化をチェックするために、Ramsey (1969)のRESET 検定のバージョンも使用した。しばしば省略変数の検定として誤って解釈されるが、RESET は非常に有用な一般的な特定化誤り検定であり、重力方程式の特定化をチェックするために(推定方法を選択するためではなく)有用である可能性がある。固定効果を持つモデルでRESET 型検定を実行する際に留意すべきことの一つは、固定効果の一部は非常に少数の観測値で推定される可能性があり、したがってそれらの推定値は非常にノイズが多くなるということである。この場合、検定で使用される累乗の線形指数の適合値には、固定効果の推定値を含めるべきではない。

重力方程式の標準的な定式化は実際に極めて成功しており、堅固な理論的基礎を持っている(例えば、Anderson and van Wincoop (2003)とその中の参考文献を参照)。この標準的な定式化は、貿易のゼロと正の観測値を同じ方法で扱う単一指数モデル(single-index model)である。しかしながら、Helpman et al. (2008)のような著者は、輸出するかどうかの外延的マージンの決定と、どれだけ輸出するかの内包的マージンの決定を分離する二重指数貿易モデル(double-index trade models)を提案している。¹¹他の分野(例えば、医療経済学)においても、研究者が単一指数モデルと二重指数モデルのどちらかを選択しなければならない場合がしばしばあり、したがって非負データのモデルに対するこれらの競合する特定化の間で選択する方法を持つことは興味深い。

標準的な重力方程式とほとんどの単一指数モデルは、尤度関数の正しい特定化を必要としないPPMLによって推定できるため、貿易の単一指数モデルと二重指数モデルの間の選択は、情報量規準に基づくことはできない。なぜなら、これらは尤度に基づいているからである。¹²同様に、非ネスト仮説の検定の大部分も、この目的のために使用することはできない。なぜなら、それらも尤度に基づいているからである。しかしながら、Santos Silva et al. (2015)において、我々はこの目的のために使用できる単純な検定を開発した。この検定は広く使用されていないが、それはおそらく、ほとんどの研究者が伝統的な重力方程式に満足しており、二重指数の代替案を検討していないという事実を反映している。

5 シミュレーションと応用

Santos Silva and Tenreyro (2006)において、我々は、 $\ln(y)$ を x に対して最小二乗回帰する重力方程式推定の伝統的アプローチが非常に誤解を招く結果につながる可能性があり、PPMLは最適な推定量でない場合でも一般的に非常に良好に振る舞うという圧倒的なシミュレーション証拠を提供した。しかしながら、Santos Silva and Tenreyro (2006)で検討された主要なシミュレーション設計における従属変数は厳密に正である。従属変数がゼロを含まないという事実により、複数の研究者が我々の結果の妥当性に疑問を呈し、従属変数に多くのゼロが含まれる状況においてPPMLの性能が低いという根拠のない主張がなされた。

我々が主要なシミュレーションで厳密に正の従属変数を使用した理由は単純である。当時、我々はゼロを含み、指数型条件付き期待値を持つ非負データを生成する方法を知らなかったのである。¹³我々はSantos Silva and Tenreyro (2011a)において、従属変数が任意に高い割合のゼロを持つことができ、指数型期待値を持つ魅力的なデータ生成過程を導入することで、この問題を解決した。¹⁴ Santos Silva and Tenreyro (2011a)で提示されたシミュレーション結果は、非常に高い割合のゼロが存在する場合でもPPMLの性能が非常に強力であることを確認し、Gourieroux et al. (1984)によって確立されたPPML推定量の理論的性質とともに、従属変数が高い割合のゼロを持つ可能性があるという事実がPPML推定量の性能に影響を与えないことを、最も懐疑的な人々でさえ納得させるのに十分であるはずである。¹⁵

Santos Silva and Tenreyro (2006)で提示した実証例は、PPML推定量で得られた結果が、伝統的な方法や、トービットに基づく推定量や対数をとる前に従属変数に任意の定数を加える推定量のような、この文脈で正当化することが困難な他の方法で得られた結果と実質的に異なることを確認した。¹⁶

¹⁰しかしながら、推定されるモデルが重力方程式でない場合には、これらの検定は有用である可能性がある。そのような場合、我々は、Santos Silva and Tenreyro (2006)の式(12)の回帰をPPMLで推定することに基づく検定を推奨する。

¹¹Santos Silva et al. (2014)において、我々はHelpman et al. (2008)の枠組みを用いて、輸出セクター数として定義される貿易の外延的マージンのモデルを提示し、適切な推定量を提案している。

¹²より一般的には、人気のあるAICやBICのような情報量規準は、擬似最尤法によって推定されたモデルを比較するのに有用ではなく、従属変数のスケールに対して不変ではない。同様に、尤度に基づく適合度の尺度も、この文脈では妥当ではない。

¹³この困難さはまた、データにゼロがある場合にPPMLが良好に機能しなかったと他の研究者が発見した理由も説明する。彼らのデータにはゼロがあったが、指数型条件付き期待値を持っていなかったため、PPMLはその場合には適していないのである。

¹⁴Eaton et al. (2013)も参照。

¹⁵一部の研究者は依然として納得していないが、願わくは、これらの根拠のない懸念は間もなく解消されるであろう。

¹⁶他の多くの研究が、PPML推定値は伝統的アプローチを用いて得られたものと実質的に異なることを確認している。De Sousa (2012)は、この特に明確な例である。

この応用はまた、後に多くの他の著者によって確認された予期せぬ結果も提供した。すなわち、従属変数がゼロである観測値を除外して推定を実行しても、PPML 推定値はほとんど変化しないということである。後知恵の利点により、我々はなぜゼロを除外することが PPML 推定値にほとんど影響を与えないのかを説明することができた。条件付き平均がゼロに近い観測値は分散が低く、したがって貿易の値が小さいかゼロである観測値については残差がゼロに近いからである。これは、従属変数がゼロに等しい観測値が擬似対数尤度関数の値への寄与が非常に小さく、したがって推定結果への寄与が小さいことを意味する。したがって、PPML を使用する我々の最初の動機となったものは、特に重要ではないことが判明したが、イェンセンの不等式の含意を無視することによって引き起こされる問題は、我々が予想していたよりも深刻であった。¹⁷

6 他の文脈における PPML 推定量

弾力性を対数線形回帰を用いて推定するという確立された実践が誤解を招く結果につながる可能性があるという示唆は、当初は懐疑的に受け止められた。¹⁸ 査読者でさえ、「問題の実際の重要性には納得できなかった」と指摘した。しかしながら、問題の重要性は徐々に認識されるようになり、PPML は現在、貿易の重力方程式の推定に広く使用されている。

しかしながら、Santos Silva and Tenreyro (2006) で指摘したように、PPML 推定量は、研究対象の方程式が伝統的に対数線形化された形で推定される幅広い経済学的应用において使用することができ、PPML は現在、多くの他の分野でも受け入れられつつある。PPML 推定量を使用したすべての応用の包括的なレビューをここで提供することは不可能であるが、本節では重力方程式やその他のモデルを推定するためのその使用の興味深い例をいくつか紹介する。

重力方程式は、移民フローの研究において頻繁に使用される (例えば、Beine et al., 2016 を参照)。これらの研究では、従属変数はしばしば (常にではないが) カウントであり、したがってこの文脈におけるポアソン回帰の使用はさらに自然である。実際、この方法の使用は Flowerdew and Aitkin (1982) によって提案されたが、当時はポアソン回帰の魅力的な性質はまだ知られておらず、したがってこの研究はあまり影響を与えなかった。より最近の研究 (例えば、Beine and Parsons, 2015) は、多数の固定効果を含み、従属変数がカウントではないモデルを推定するために PPML を使用しており、これは貿易の文献と非常に似ている。

海外直接投資 (FDI) の研究も重力方程式に大きく依存しており、PPML は現在この文脈でしばしば使用されている (初期の例としては、例えば Head and Ries (2008) を参照)。しかしながら、ここには可能性のある複雑な問題がある。純 FDI フローは負になる可能性がある。一部の観測値が負であるという事実は、重力方程式が不適切であり、PPML 推定量を適用すべきでないことを意味するものではない。実際、この文脈で PPML 推定量の妥当性のために必要なのは、純フローの条件付き期待値が重力方程式によって与えられ、したがって常に非負であることだけである。それが当てはまる場合、一部の純 FDI フローが負であっても、PPML 推定量は引き続き適切である。¹⁹

重力方程式の推定を超えて、Manning and Mullahy (2001) の先駆的研究の影響を反映して、我々は医療経済学における PPML 推定の多くの例を見出す。例えば、Kaiser et al. (2014) は PPML を用いて医薬品の小売価格に対する改革の影響を評価し、Powell and Seabury (2018) は PPML を用いて医療支出のモデルを推定している。他の種類の支出のモデルも PPML によって推定されている。例えば、Fisher (2016) は PPML を用いて家計支出のモデルを推定し、Jeong and Siegel (2018) は PPML を用いて企業が支払う賄賂のモデルを推定している。

貿易の文献以外での PPML 推定量の初期の使用例としては、賃金方程式の推定があり、これは我々が Santos Silva and Tenreyro (2006) で明示的に言及した分野である。Blackburn (2007) は、PPML を含むいくつかの擬似最尤推定量を用いてレベルでの賃金方程式を推定している。より最近では、Petersen (2017) および Powell and Seabury (2018) も PPML によって所得の方程式を推定している。

コブ=ダグラス生産関数は最もよく知られた定数弾力性モデルの一つであり、したがって、貿易の文献以外での PPML の最初の使用例の一つが生産関数の推定に関係していたことは驚くことではない。PPML が有用である文脈であることを明示的に言及した Santos Silva and Tenreyro (2006) を基礎として、Sun et al. (2011) は生産関数のレベルでの推定を提唱し、彼らの応用で PPML を使用した。より最近では、Dias and Marques (2021) は、企業レベルのデータに基づく生産性ダイナミクスの推定が、対数とレベルのどち

¹⁷我々がゼロを含む場合と含まない場合で PPML によりモデルを推定したのは、PPML 推定値と伝統的な最小二乗法で得られた推定値の間の差異を引き起こしているのが、異なるサンプルであるかどうかを理解しなかったからである。我々は、他の研究者もゼロを含む場合と含まない場合で PPML によりモデルを推定しているのをしばしば目にするが、現在それを行うことで得られるものはほとんどない。

¹⁸我々の論文が発表された後の最初の数年間、多くの著者が我々の結果は誤りであると主張した。そのような主張は現在では少なくともなくなっている。

¹⁹ただし、従属変数が負の観測値を持つ場合、一部のソフトウェアはポアソン回帰を推定しないことに注意されたい。

らを使用するか依存することを示し、分析が加重された生産性の尺度に基づいている場合は、レベルでのデータの使用を支持する議論を行っている。

より一般的には、PPML は期間のモデル (Abboud et al. 2016 および Call et al. 2018)、R&D 投資 (Cowan et al. 2015、および Gucerri and Liu 2015)、債務 (Oksanen et al., 2015 および Lee and Mori 2021)、損失と収益 (Levieuge et al. (2021)、および Paniagua et al. (2018))、合併・買収の価値 (Todtenhaupt et al. 2020)、違法薬物販売の価値 (Nurmi et al. 2017)、風力発電容量 (Goetzke and Rave 2016) の推定、および山火事の影響を評価するモデルの推定 (Eskelson et al. 2016 および Peterson et al. 2019) に使用されている。

最後に、PPML は世代間所得移動の研究においても重要になりつつあることを指摘する。Mitnik and Grusky (2020) は、世代間移動のモデルの推定における PPML の使用を強く主張し、その使用が実質的な違いをもたらすことを示している。Helsø (2021) もこの文脈で PPML を使用している。

7 結論

PPML 推定量は、重力方程式の推定に極めて適している。それが我々が Santos Silva and Tenreyro (2006) で主張した点であり、我々や他の多くの研究者によって行われたフォローアップ研究のおかげで、その結果は今日さらに明確になり、広く受け入れられている。実際、大多数の場合において、重力方程式の代替推定量を検討する理由は全くない。なぜなら、第 3 節で議論した PPML の魅力的な特徴のすべてを共有する他の推定量は存在しないからである。

数年前、PPML 推定量の使用は計算上の問題のために困難である可能性があった。実際、一部の著者は、直面した計算上の課題のために PPML 推定値を報告しないとさえ述べている。しかしながら、Correia et al. (2020) による `ppmlhdfe` Stata コマンドの導入により、非常に大規模なパネルを用いた複雑な重力方程式でさえも推定することが非常に容易になった。このコマンドは最新技術を代表するものであり、PPML 推定量の一般的な使用に対する最後の障害を本質的に取り除いた。

我々は、さまざまな方法の寄せ集めを用いて重力方程式の推定結果を提示する論文をしばしば目にし、一部の著者はその実践を推奨するところまで行っている。我々は、ほぼ確実に無効である方法によって得られた結果で PPML 推定値を補完することによって何が得られるのか理解できず、モデルが正しく特定化されており、関心のある問いに答えるために使用できることを確認することに研究時間を費やす方が良いと提案する。

読者が興味深いと思うかもしれない小さな逸話で結論とする。「The Log of Gravity」は、著者の一人が偶然にも他方に 10 年前のワーキングペーパー (Santos Silva 1991) のコピーを求めるメールを送ったときに始まった。我々は論文に取り組み始めたときお互いを知らず、我々の共同研究は完全にファックスとメール (異なるタイムゾーンのため困難であった) で行われ、論文がすでに出版を受理されたときに初めて会った。我々がどれだけ計画を立て、どれだけ懸命に働こうとも、運は常に我々の人生とキャリアにおいて大きな役割を果たすものであり、我々は他の多くの人々よりも幸運であった。

References

- Abboud ME, Band R, Jia J, Pajerowski W, David G, Guo M, Mechem CC, Messé SR, Carr BG, Mullen MT (2016) Recognition of stroke by EMS is associated with improvement in emergency department quality measures. *Prehosp Emerg Care* 20:729–736
- Albert A, Anderson JA (1984) On the existence of maximum likelihood estimates in logistic models. *Biometrika* 71:1–10
- Anderson JE, Larch M, Yotov YV (2018) GEPPML: General equilibrium analysis with PPML. *The World Economy* 41:2750–2782
- Anderson JE, van Wincoop E (2003) Gravity with gravitas: a solution to the border puzzle. *Am Econ Rev* 93:170–192
- Baier SL, Bergstrand JH (2007) Do free trade agreements actually increase members' international trade? *J Int Econ* 71:72–95
- Beine M, Bertoli S, Fernández-Huertas Moraga J (2016) A practitioners guide to gravity models of international migration. *The World Economy* 39:496–512
- Beine M, Parsons C (2015) Climatic factors as determinants of international migration. *Scand J Econ*: 723–767

- Bergé L (2018) Efficient estimation of maximum likelihood models with multiple fixed-effects: the R package FENmlm, DEM Discussion Paper Series 18-13, Department of Economics at the University of Luxembourg
- Blackburn ML (2007) Estimating wage differentials without logarithms. *Labour Econ* 14:73–98
- Bosquet C, Boulhol H (2014) Applying the GLM variance assumption to overcome the scale-dependence of the negative binomial QGPML estimator. *Econ Rev* 33:772–784
- Call AC, Martin GS, Sharp NY, Wilde JH (2018) Whistleblowers and outcomes of financial misrepresentation enforcement actions. *J Account Res* 56:123–171
- Cameron AC, Trivedi PK (2013) *Regression analysis of count data*, 2nd edn. Cambridge University Press, Cambridge
- Correia S, Guimarães P, Zylkin T (2019) Verifying the existence of maximum likelihood estimates for generalized linear models, arXiv:1903.01633
- Correia S, Guimarães P, Zylkin T (2020) Fast Poisson estimation with high-dimensional fixed effects. *STATA Journal* 20:95–115
- Cowan BW, Lee D, Shumway CR (2015) The induced innovation hypothesis and U.S. public agricultural research. *Am J Agric Econ* 97:727–742
- De Sousa J (2012) The currency union effect on trade is decreasing over time. *Econ Lett* 117:917–920
- Dias DA, Marques CR (2021) From micro to macro: a note on the analysis of aggregate productivity dynamics using firm-level data. *J Product Anal*, forthcoming
- Eaton B, Kortum S, Sotelo S (2013) International trade: linking micro and macro. In: Acemoglu D, Arellano M, Dekel E (eds) *Advances in economics and econometrics: tenth world congress*. Cambridge University Press, Cambridge, pp 329–370
- Egger PH, Staub KE (2015) GLM Estimation of trade gravity models with fixed effects. *Empir Econ* 50:137–175
- Egger PH, Tarlea P (2015) Multi-way clustering estimation of standard errors in gravity models. *Econ Lett* 134:144–147
- Eskelson BNI, Monleon VJ, Fried JS (2016) A 6 year longitudinal study of post-fire woody carbon dynamics in California’s forests. *Can J Forest Res* 46:610–620
- Fally T (2015) Structural gravity and fixed effects. *J Int Econ* 97:76–85
- Fernández-Val I, Weidner M (2016) Individual and time effects in nonlinear panel models with large N, T. *J Econ* 192:291–312
- Fisher P (2016) British tax credit simplification, the intra-household distribution of income and family consumption. *Oxf Econ Pap* 68:444–464
- Flowerdew R, Aitkin M (1982) A method of fitting the gravity model based on the Poisson distribution. *J Reg Sci* 22:191–202
- Frankel J, Wei S (1993) Trade blocs and currency blocs, NBER Working Paper No. 4335
- Goetzke F, Rave T (2016) Exploring heterogeneous growth of wind energy across germany. *Util Policy* 41:193–205
- Goldberger A (1968) The interpretation and estimation of Cobb-Douglas functions. *Econometrica* 36:464–472
- Goldberger A (1991) *A course in econometrics*. Harvard University Press, Cambridge
- Gourieroux C, Monfort A, Trognon A (1984) Pseudo maximum likelihood methods: applications to Poisson models. *Econometrica* 52:701–720
- Guceri I, Liu L (2019) Effectiveness of fiscal incentives for R&D: quasi-experimental evidence. *Am Econ J: Economic Policy* 11:266–291

- Guimarães P, Portugal P (2010) A simple feasible procedure to fit models with high-dimensional fixed effects. *Stata Journal* 10:628–649
- Head K, Ries J (2008) FDI as an outcome of the market for corporate control: theory and evidence. *J Int Econ* 74:2–20
- Helpman E, Melitz M, Rubinstein Y (2008) Estimating trade flows: trading partners and trading volumes. *Q J Econ* 123:441–487
- Helsø A-L (2021) Intergenerational income mobility in Denmark and the United States. *Scand J Econ* 123:508–531
- Hinz J, Hudlet A, Wanner J (2019) Separating the wheat from the chaff: Fast estimation of GLMs with high-dimensional fixed effects. European University Institute, mimeo
- Hummels D (1999) Toward a geography of trade costs, GTAP Working Papers 1162, Center for Global trade analysis, department of agricultural economics, Purdue University
- Jeong Y, Siegel JI (2018) Threat of falling high status and corporate bribery: Evidence from the revealed accounting records of two South Korean presidents. *Strategic Management* 39:1083–1111
- Jochmans K (2017) Two-way models for gravity. *Rev Econ Stat* 99:478–485
- Jochmans K, Verardi V (2019) IVGRAVITY: Stata module containing method-of-moment IV estimators of exponential-regression models with two-way fixed effects from a cross-section of data on dyadic interactions and endogenous covariates, statistical software components S458698, Boston College Department of Economics
- Kaiser U, Mendez SJ, Rønde T, Ullrich H (2014) Regulation of pharmaceutical prices: evidence from a reference price reform in Denmark. *J Health Econ* 36:174–187
- Lancaster T (2000) The incidental parameter problem since 1948. *J Econ* 95:391–413
- Lee KO, Mori M (2021) Conspicuous consumption and household indebtedness. *Real Estate Economics*, forthcoming
- Leveuge G, Lucotte Y, Pradines-Jobet F (2021) The cost of banking crises: does the policy framework matter? *J Int Money Financ* 110:102–290
- Manning WG, Mullahy J (2001) Estimating log models: to transform or not to transform? *J Health Econ* 20:461–494
- Mitnik P, Grusky D (2020) The intergenerational elasticity of what? The case for redefining the workhorse measure of economic mobility. *Sociol Methodol* 50:47–95
- Mullahy J (1986) Specification and testing of some modified count data models. *J Econ* 33:341–365
- Mullahy J (1997) Instrumental variables estimation of Poisson regression models, applications to models of cigarette smoking behavior. *Rev Econ Stat* 79:586–593
- Nurmi J, Kaskela T, Perälä J, Oksanen A (2017) Seller’s reputation and capacity on the illicit drug markets: 11-Month study on the finnish version of the silk road. *Drug Alcohol Depend* 178:201–207
- Oksanen A, Aaltonen M, Rantala K (2015) Social determinants of debt problems in a nordic welfare state: a finnish register-based study. *J Consum Policy* 38:229–246
- Paniagua J, Rivelles R, Sapena J (2018) Corporate governance and financial performance: the role of ownership and board structure. *J Bus Res* 89:229–234
- Papke LE, Wooldridge JM (1996) Econometric methods for fractional response variables with an application to 401(k) plan participation rates. *J Appl Econ* 11:619–632
- Park R (1966) Estimation with heteroskedastic error terms. *Econometrica* 34:888
- Petersen T (2017) Multiplicative models for continuous dependent variables: estimation on unlogged versus logged form. *Sociol Methodol* 47:113–64
- Peterson KF, Eskelson BNI, Monleon VJ, Daniels LD (2019) Surface fuel loads following a coastal-transitional fire of unprecedented severity: boulder creek fire case study. *Can J Forest Res* 49:925–932

- Powell D, Seabury S (2018) Medical care spending and labor market outcomes: evidence from workers' compensation reforms. *Am Econ Rev* 108:2995–3027
- Ramsey JB (1969) Tests for specification errors in classical linear least squares regression analysis. *J Royal Stat Soc B* 31:350–371
- Reis HJ, Santos Silva JMC (2006) Hedonic prices indexes for new passenger cars in Portugal (1997–2001). *Econ Model* 23:890–908
- Santos Silva JMC (1991) Discriminating between the linear and log-linear forms of a regression model: optimal instrumental variables tests, University of Bristol, Department of Economics, Discussion Paper No. 91/301
- Santos Silva JMC, Tenreyro S (2006) The log of gravity. *Rev Econ Stat* 88:641–658
- Santos Silva JMC, Tenreyro S (2010) On the existence of the maximum likelihood estimates in Poisson regression. *Econ Lett* 107:310–312
- Santos Silva JMC, Tenreyro S (2011a) Further simulation evidence on the performance of the Poisson pseudo-maximum likelihood estimator. *Econ Lett* 112:220–222
- Santos Silva JMC, Tenreyro S (2011b) poisson: some convergence issues. *STATA Journal* 11:207–212
- Santos Silva JMC, Tenreyro S, Wei K (2014) Estimating the extensive margin of trade. *J Int Econ* 93:67–75
- Santos Silva JMC, Tenreyro S, Windmeijer F (2015) Testing competing models for non-negative data with many zeros. *J Econometric Methods* 4:29–46
- Stammann A (2018) Fast and feasible estimation of generalized linear models with high-dimensional k-way fixed effects, arXiv:1707.01815v3
- Sun K, Henderson DJ, Kumbhakar SC (2011) Biases in approximating log production. *J Appl Econ* 26:708–714
- Todtenhaupt M, Voget J, Feld LP, Ruf M, Schreiber U (2020) Taxing away M&A: Capital gains taxation and acquisition activity. *Eur Econ Rev* 128:103–505
- Verbeek A (1989) The compactification of generalized linear models. In: Decarli A, Francis BJ, Gilchrist R, Seeber G (eds) *Statistical modelling, proceedings of GLIM 89 and the 4th International workshop on statistical modeling*. Springer, New York, pp 314–327
- Verbeek A (1992) The compactification of generalized linear models. *Statistica Neerlandica* 46:107–142
- Wedderburn RWM (1976) On the existence and uniqueness of the maximum likelihood estimates for certain generalized linear models. *Biometrika* 63:27–32
- Weidner M, Zylkin T (2020) Bias and consistency in three-way gravity models, arXiv:1909.01327v5
- Windmeijer F, Santos Silva JMC (1997) Endogeneity in count data models: an application to demand for health care. *J Appl Econ* 12:281–294
- Wooldridge JM (1992) Some alternatives to the Box-Cox regression model. *Int Econ Rev* 33:935–955
- Wooldridge JM (1999) Distribution-free estimation of some nonlinear panel data models. *J Econ* 90:77–97
- Yotov YV, Piermantini R, Monteiro JA, Larch M (2016) *An advanced guide to trade policy analysis: the structural gravity model*. Geneva (Switzerland): World Trade Organization