

貿易の重力方程式と PPML 推定量 定数弾力性モデルの推定における最新アプ ローチ

J. M. C. Santos Silva & Silvana Tenreyro (2022)

資料作成: 田中鮎夢

2025-10-30

1. 導入：定数弾力性モデルと伝統的な推定

The Log of Gravity at 15

- ▶ 本講義は、Santos Silva and Tenreyro (2006) の論文「The Log of Gravity」の影響を振り返ったレビュー論文（2022年）の内容に基づいている。
- ▶ **重要なテーマ**：重力方程式などの**定数弾力性モデル**を推定する際の伝統的な慣行に異議を唱え、**ポアソン擬似最尤 (PPML) 推定量**の使用を推奨すること。

定数弾力性モデル

経済理論は、非負の変数 y (例：貿易フロー T) と説明変数 x (例：規模 Y や距離 D) の関係を、以下の**定数弾力性モデル**として定式化。

$$y = \exp(x\beta) \quad (1)$$

- ▶ 関数 $\exp(x\beta)$ は、 x が与えられたときの y の条件付き期待値 $E[y|x]$ として解釈。

重力方程式の定式化

- ▶ 貿易の重力方程式の例では、最も単純な形は次のようになる：

$$T = \beta_0 Y^{\beta_1} D^{\beta_2} \quad (2)$$

ここで、 T は貿易フロー、 Y は経済規模、 D は距離、 $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ は推定すべきパラメータ。

2. 伝統的な推定方法の深刻な問題

伝統的なアプローチの問題点 (1)：ゼロ値の処理

- ▶ 従来の多くの計量経済学の教科書では、式 (1) を対数線形化し、 $\ln(y)$ を x に対して**最小二乗回帰 (OLS)** することでパラメータ β を推定。
- ▶ **問題点:** 貿易フロー T のように**ゼロ値**を持つ観測がある場合、 $\ln(y)$ は計算できないため、このアプローチは**実行不可能 (Infeasible)**。

伝統的なアプローチの問題点 (2)：イェンセンの不等式

- ▶ このアプローチのより深刻な問題は、**イェンセンの不等式**に起因。
- ▶ 経済モデルの確率的対応物を考えると、対数変換は一般に成り立たない。

$$y = \exp(x\beta)\eta \quad \text{where } E[\eta|x] = 1 \quad (4)$$

- ▶ 対数変換を行うと $\ln(y) = x\beta + \ln(\eta)$ となるが、OLS 推定量が β に対して一致性を持つためには $\ln(\eta)$ が x と無相関であるという**非常に制約的な条件**が必要。
- ▶ この条件は一般的に満たされないため、対数での OLS 回帰は、条件付き期待値 $E[y|x] = \exp(x\beta)$ のパラメータ β に対し一般的に**不一致 (Inconsistent)** な推定量となる。

3. PPML 推定量の導入と特徴

PPML (Poisson Pseudo Maximum Likelihood) 推定量

- ▶ PPML は、モデルを変換せず、 $E[y|x] = \exp(x\beta)$ を直接推定するための代替手段として提案された。
- ▶ この推定量は、すべての観測値に**同じ重みを与える**モーメント条件 $E[(y - \exp(x\beta))x] = 0$ に基づいている。
- ▶ PPML 推定量は、**ポアソン回帰推定量と一致する**という利便性がある。
- ▶ PPML は、**尤度関数を正しく特定する必要がない**ため、擬似最尤推定量と呼ばれる。その**一致性は、 $E[y|x] = \exp(x\beta)$ という重力方程式の特定化が正しい場合**にのみ依存。

カウントデータ推定量との比較

- ▶ 重力方程式の推定目的は $E[y|x]$ を推定することであり、確率 $Pr(y = k|x)$ を推定することではない。
- ▶ PPML は、その一致性が付随的な分布の仮定に依存しないため優れている。
- ▶ 負の二項推定量やゼロ過剰モデルなど、過分散を許容する推定量は、従属変数のスケール（測定単位）に敏感であり、結果が恣意的になる問題がある。

4. PPML と高次元固定効果・構造重力モデル

PPML と付随パラメータ問題

- ▶ 重力方程式では、多国間抵抗を考慮するため、**起点固定効果**と**終点固定効果**を含めることが標準的。これにより、パラメータの数が増え、**付随パラメータ問題**が生じうる。
- ▶ **PPML の強み:**
 - ▶ PPML は、双方向固定効果（起点・終点）を持つモデルにおいても、付随パラメータ問題の影響を受けないことが証明されている (Fernández-Val and Weidner 2016)。
 - ▶ さらに複雑な三方向固定効果を持つパネルモデルでも、PPML は一貫性を持つ**唯一の擬似最尤推定量** (Weidner and Zylkin 2020)。

構造重力モデルとの整合性

- ▶ 貿易政策の**一般均衡分析**には、多国間抵抗を考慮した**構造重力モデル**が必要。
- ▶ Fally (2015) は、PPML によって重力方程式が推定された場合、推定された固定効果が**自動的に多国間抵抗指数の均衡条件を満たす**ことを示した。
- ▶ この構造的な整合性を持つという点で、PPML は**唯一の擬似最尤推定量**。

5. 応用例と計算上の進歩

PPML の幅広い応用

PPML 推定量は、重力方程式（貿易、移民フロー、FDI）以外にも、定数弾力性モデルの推定において広く応用されている。

▶ **その他の応用例:**

- ▶ 医療経済学における医療支出モデルの推定。
- ▶ 賃金方程式や所得の方程式の推定。
- ▶ コブ=ダグラス生産関数のレベルでの推定。
- ▶ 世代間所得移動の分析。

計算上の課題と解決

- ▶ PPML は、完璧にゼロ値を予測する回帰変数（**完全予測子**）が存在する場合、推定値が**非存在**となる計算上の課題があった。
- ▶ この問題は、Correia et al. (2020) による `ppmlhdfe` Stata コマンドの導入によって効果的に解決された。
- ▶ `ppmlhdfe` は、高次元固定効果を持つモデルの推定を大幅に簡素化するアルゴリズムを提供し、PPML の一般的な使用に対する最終的な障害を取り除いた。

確認問題

問 1

Santos Silva and Tenreyro (2006) が、伝統的な重力方程式の推定（対数変換 + OLS）に異議を唱えた最も深刻な理論的理由として強調されているのはどれか。

- A. データにゼロ値が存在し、対数が取れないため。
- B. OLS 推定量が、イェンセンの不等式により一般的に不一致となるため。
- C. OLS 推定量が、多国間抵抗を考慮できないため。
- D. OLS 推定量は、付随パラメータ問題の影響を受けやすいため。

問 2

PPML 推定量が、重力方程式 $E[y|x] = \exp(x\beta)$ の推定において
一貫性を持つために必要な主要な仮定はどれか。

- A. 従属変数 y が厳密にポアソン分布に従うこと。
- B. 従属変数 y がゼロ値を含まないこと。
- C. 条件付き期待値の特定化 $E[y|x] = \exp(x\beta)$ の妥当性のみに依存すること。
- D. 使用される固定効果の数が少ないこと。

問 3

PPML 推定量が、非線形最小二乗法（NLLS）と比較して推奨される理由として、示されているのはどれか。

- A. NLLS は計算が困難だが、PPML は常に簡単である。
- B. PPML は NLLS と異なり、すべての観測値に同じ重みを与えるため。
- C. NLLS はゼロ値を持つデータで使用できないため。
- D. PPML は NLLS よりも大きな分散を持つ観測値に大きな重みを与えるため。

問 4

重力方程式の推定目的が $E[y|x]$ である場合、ゼロ過剰モデルなどの推定量が PPML よりも劣るとされる理由として正しいものはどれか。

- A. ゼロ過剰モデルはゼロ値を含まないデータにしか適用できない。
- B. その一致性が付随的な分布の仮定に依存するため、PPML ほど頑健でないため。
- C. ゼロ過剰モデルは過分散に対応できず、効率が低下するため。
- D. ゼロ過剰モデルは、双方向固定効果を持つモデルでは常に不一致となるため。

問 5

PPML 推定量は、双方向固定効果を持つ重力モデル（起点/終点固定効果）において一貫性を持つことが示されているが、これはどの問題の影響を受けないことを示しているか。

- A. イェンセンの不等式の影響。
- B. スケール依存性の問題。
- C. 付随パラメータ問題 (Incidental Parameter Problem) の影響。
- D. 内生性の問題。

問 6

Fally (2015) が実証した、PPML が構造重力モデルの分析に極めて有用であるとされる性質はどれか。

- A. PPML が一般均衡効果を直接推定できること。
- B. PPML が推定された固定効果から、多国間抵抗指数の均衡条件を自動的に満たすこと。
- C. PPML が、内生的な自由貿易協定を自動的に制御できること。
- D. PPML が推定値の漸近バイアスを完全に除去できること。

問 7

PPML 推定の計算上の課題の一つとして、高次元固定効果を持つモデルで生じやすい「非存在問題」は、何が原因で発生すると説明されているか。

- A. 条件付き期待値が指数型ではないため。
- B. 従属変数がゼロである観測値の一部を完全に予測する回帰変数（完全予測子）の存在のため。
- C. データのクラスタリング構造が複雑すぎるため。
- D. データのサンプルサイズが小さすぎるため。

問 8

PPML の性能に関するシミュレーション結果 (Santos Silva and Tenreyro 2011a) に基づき、PPML の性能について確認された事実はどれか。

- A. 対数線形化 OLS よりも効率が低いことが常に確認された。
- B. 従属変数が非常に高い割合のゼロを持つ場合でも、性能が非常に強力である。
- C. ゼロ値を持つデータでは PPML は使用すべきでないことが判明した。
- D. ゼロ値を除外した方が常に優れた結果をもたらす。

問 9

以下のうち、重力方程式の推定とは異なる文脈で PPML が応用されている例として、適切なものはどれか。

- A. 賃金方程式の推定。
- B. コブ=ダグラス生産関数の推定。
- C. 世代間所得移動の分析。
- D. 上記すべて。

問 10

Santos Silva and Tenreyro は、現在、研究者が重力方程式の推定において「ほとんど得られるものがなくなった」と指摘している慣行はどれか。

- A. PPML 推定値を、ほぼ確実に無効な他の方法（例：トービット、対数 OLS）で得られた推定値で補完すること。
- B. 推定前にデータの分布をテストすること。
- C. ゼロ値の観測値をすべて除外すること。
- D. ゼロを含む場合と含まない場合の両方で PPML によりモデルを推定すること。

解答

1. B
2. C
3. B
4. B
5. C
6. B
7. B
8. B
9. D
10. D